Fonction d'une variable réelle Partie II: Dérivabilité

cours MIP(M111)

Noureddine MOUSSAID

Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia
Université Hassan II de Casablanaca

Plan

Dérivée en un point

Definition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. on note cette limite $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ est appellé le nombre dérivé de f en x_0.

Exemple:

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable en 2.

Dérivée en un point

Remarque:
On peut aussi définir la dérivée de f en x_0 par

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tangente
Le coefficient directeur de la droite passant par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ est $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
A la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

est une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ou \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  est finie. On la note $f'_d(x_0)$ et on l'appelle la dérivée à droite en x_0.

- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad ou \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  est finie. On la note $f'_g(x_0)$ et on l'appelle la dérivée à gauche en x_0.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- *f est dérivable en x_0*
- *f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemple:
Pour la fonction $f(x) = |x|$, on a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Remarque:
Si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, alors la courbe de f possède une demi tangente verticale au point $(x_0, f(x_0))$.
Exemple: Montrer que la courbe de la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x}$ admet une demi tangente verticale au point $(0, 0)$.

Dérivée et continuité

Proposition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Attention: La réciproque n'est pas vraie, c'est à dire: si f est continue cela n'implique pas que f est dérivable.
Exemple: $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$

Dérivée sur un intervalle

Definition

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle $[a, b]$, si f est dérivable en tout point $x \in]a, b[$, f est dérivable à gauche de b et f est dérivable à droite de a.

Dérivées usuelles

Dans Ce premier tableau x est une variable.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1}, \ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^r	$rx^{r-1}, r \in \mathbf{R}$
e^x	e^x
lnx	$\frac{1}{x}$
$cosx$	$-sinx$
$sinx$	$cosx$
$tanx$	$1 + tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^r	$ru'u^{r-1},\ r \in \mathbf{R}$
e^u	$u'e^u$
lnu	$\frac{u'}{u}$
$cosu$	$-u'sinu$
$sinu$	$u'cosu$
$tanu$	$u'(1+tan^2u) = \frac{u'}{cos^2u}$
$(u+v)'$	$u'+v'$
$(u.v)'$	$u'.v+u.v'$
$(\frac{u}{v})'$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
$(u \circ v)'$	$u'(v).v'$

Exercice

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$*:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = 0 \\ x + \frac{x \ln(x)}{1-x} & si \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & si \;\; x = 1 \end{cases}$$

Dérivées successives

Definition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
Si f est dérivable sur I, soit $f' : I \longrightarrow \mathbf{R}$ sa fonction dérivée.

- Si f' est à son tour dérivable sur I, on note f'' sa dérivée qu'on appelle la dérivée seconde de f.
- Les dérivées successives (si elles existent) on les note: f', f'', $f^{(3)}$,..., $f^{(n)}$ pour tout entier n.
- La fonction $f^{(n)}$ est appellée la dérivée n-ième de f.
- On dit que f est indéfiniment dérivable si $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque:
Les domaines de définition de $f, f', ..., f^{(n)}$ sont en général différrents.

$$f(x) = ln(x) \quad ; \quad g(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

Exemple: Déterminer la dérivée n-ième de la fonction $f(x) = e^x$.

Dérivées successives

Definition

- On dit qu'une fonction f est de classe C^m sur un intervalle I si f est m-fois dérivable sur I et si f^m est continue.
- f est dite de classe C^∞ sur un intervalle I si f est indéfiniment dérivable.

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

- $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0).$
- $(\lambda.f)^{(n)}(x_0) = \lambda.f^{(n)}(x_0).$

Formule de Leibniz

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
Alors, $(f.g)^{(n)}(x_0)$ existe et on a la formule de Leibniz:

$$(f.g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

Exemple:

Calculer la dérivée $2me$ de la fonction

$$f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$$

Régle de l'hôspital

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, g(x) \neq 0$ *et* $g'(x) \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = l \in \mathbf{R}$, *alors* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Remarque: La régle de l'hôpital est valable aussi pour $x_0 = \pm\infty$.

Exemple:

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$$

Calculer $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Dérivée et monotonie

Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors

- *f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) = 0, \ \forall x \in]a,b[$.*
- *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$, si et seulement si $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ (resp. $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in]a,b[$).*

Remarque:

La stricte monotonie de f est obtenue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$

- x_0 est dit un minimum local ou relatif de f si il existe $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tel que $\forall x \in J, \quad f(x) \geq f(x_0)$
- x_0 est dit minimum global ou absolu de f si $\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$
- x_0 est dit un maximum local ou relatif de f si il existe $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tel que $\forall x \in J, \quad f(x) \leq f(x_0)$
- x_0 est dit maximum global ou absolu de f si $\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$

Extremums

Proposition

Toute fonction f dérivable en x_0 et ayant un extremum en x_0 vérifie

$$f'(x_0) = 0$$

Remarque: La réciproque est fausse. c'est à dire si $f'(x_0) = 0$, ceci ne permet pas de conclure que x_0 est un extremum.
Contre-exemple: la fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas un extremum en 0.

Théorème de Rolle

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors, il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

Exercice:

Soit $f : [0,2] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable, telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [0,2]$ tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ et qu'il existe $c_3 \in [0,2]$ tel que $f''(c_3) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Si

- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$.*

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exercice:

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}.$$
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{n\to\infty} \ln n.$$
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ pour $x > 1$.
    1. Montrer que
    $$h(x) = 2 + (x-1)(1+\frac{1}{c})^c(\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c})$$
    pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.
    2. Montrer que $h(x) \geq 2$.

Solution:

1- On pose $f(t) = \ln t \; \forall t > 0$
La dérivée de f est donnée sur $]0, +\infty[$ par $f'(t) = \frac{1}{t}$
Soit $x > 0$, donc f est continue sur chaque $[x, x+1]$ et dérivale sur $]x, x+1[$, Le théorème des accroissements finis montre que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f'(c) = f(x+1) - f(x)$, c'est-à-dire, $\frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)$,
L'encadrement demandé provient du fait que $\frac{1}{c} \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$
Remarquons que cet encadrement peut aussi s'écrire

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}.$$

2- D'après la première question on a :

$$\forall n > 0, \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

pour $n = 1$, $\frac{1}{1+1} < \ln(1+1) - \ln(1) < \frac{1}{1}$,
+
pour $n = 2$, $\frac{1}{2+1} < \ln(2+1) - \ln(2) < \frac{1}{2}$,
+ .

.

+ pour $n-1$, $\frac{1}{n} < \ln(n) - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1}$,

$$= \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1<\ln n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$$

Donc

$$\frac{1}{n\ln n}+1<\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}<1+\frac{1}{\ln n}$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\ln n}+1=\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{\ln n}=1$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim_{n\to\infty}\ln n.$$

3- on a:
$h(x) = (1+\frac{1}{x})^x = e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$ pour $x > 1$
donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\ln(1+\tfrac{1}{x}) - \tfrac{1}{1+x})e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} \\ &= (\ln(1+\tfrac{1}{x}) - \tfrac{1}{1+x})(1+\tfrac{1}{x})^x \\ &= (1+\tfrac{1}{x})^x(\ln(1+x) - \ln(x) - \tfrac{1}{1+x}) \end{aligned}$$

Comme h est continue sur $[1, x]$ et dérivable sur $]1, x[$, alors d'après le théorème des accroissements finis il existe $1 < c < x$. tel que

$$h(x) - h(1) = (x-1)h'(c), \quad h(1) = 2$$

Ce qui entraine que

$$h(x) = 2 + (x-1)(1+\frac{1}{c})^c(\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c})$$

D'après la première question on a:

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

donc

$$\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c} > 0$$

Par conséquent

$$h(x) - 2 > 0$$

c'est-à-dire

$$h(x) > 2$$

Inégalité des accroissements finis

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
On suppose qu'il existe un réel M tel que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in I$. Alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M.|x - y|$$

Exemple:

Montrer que

$$|sinx - siny| \leq |x - y|$$

on pose $f(x) = \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$ comme $|\cos x| \leq 1$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis $(M = 1)$

$$|sinx - siny| \leq |x - y|$$