

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

A. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (8 điểm)

Câu I. Cho hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 9x + 2m$ (1), với m là tham số thực.

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
- 2) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị thỏa mãn khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Câu II.

- 1) Giải phương trình: $\frac{8\sin^3 x \cos x + \sin 4x}{2\cos x} = \sin 3x - 2\cos 2x + 1$.
- 2) Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt[3]{x-2} = 1$.

Câu III.

- 1) Tính tích phân: $\int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$
- 2) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm.
$$\begin{cases} 3^{x^2+x} - 3^{y^2+y} = \ln y - \ln x \\ 2x - y + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1} \end{cases}$$

Câu IV. Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = AC = BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$. Tính thể tích hình chóp và cosin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC biết rằng mp (SAB) tạo với đáy một góc bằng 60° .

Câu V. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2^a}{16^a + 2.4^a + 2.4^b + 7} + \frac{2^b}{16^b + 2.4^b + 2.4^c + 7} + \frac{2^c}{16^c + 2.4^c + 2.4^a + 7} \leq \frac{1}{4}$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (2 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn.

Câu VI.a (2 điểm)

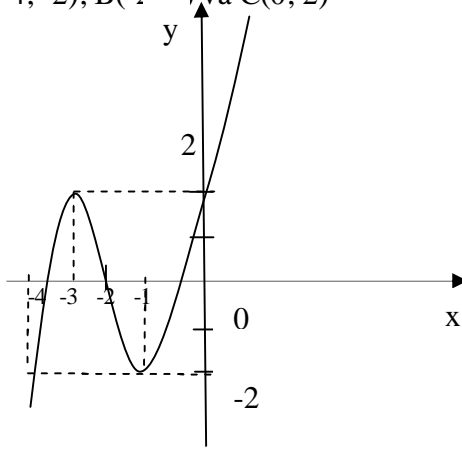
- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng AB, AC lần lượt là $2x + y - 3 = 0$ và $x + 2y - 3 = 0$, đường thẳng BC đi qua điểm I(0;-1). Hãy xác định tọa độ các đỉnh A, B, C.
- 2) Giải bất phương trình sau: $8^x - 4^{x^2+3x} + 3(\sqrt{2})^{2x^2+9x-2} \geq 0$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có B(-1;2), C(2;-1) và A nằm trên đường thẳng $2x + y + 5 = 0$. Tìm A sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.
- 2) Giải bất phương trình sau: $x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - 1) \geq 1 - 3\log_3 2$

-----Hết-----

| Câu | Nội dung | Điểm | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|-----------|-----------|------|------|------|-----------|-----------|------|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|--|-----|--|------|-----------|-----|
| Câu I | <p>1. Với $m = 1$ ta có : $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ + TXĐ : $D = \mathbb{R}$ + Sự biến thiên: $y' = 3x^2 + 12x + 9, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$</p> | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -1)$ - Hàm số đạt cực đại tại $x = -3; y_{cd} = 2$, đạt cực tiểu tại $x = -1; y_{ct} = -2$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$</p> | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>- Bảng biến thiên:</p> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr></table> | x | $-\infty$ | -3 | | -1 | | $+\infty$ | y' | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | y | $-\infty$ | | 2 | | -2 | $+\infty$ | 0,5 |
| | x | $-\infty$ | -3 | | -1 | | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | y' | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | y | $-\infty$ | | 2 | | -2 | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Đồ thị: Đi qua các điểm $A(-4; -2); B(-2; 0)$ và $C(0; 2)$</p>  | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>2. Ta có: $y' = 3x^2 + 12mx + 9, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4mx + 3 = 0$ + Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (*)</p> | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Khi đó ta có: $y = \left(\frac{x}{3} + \frac{2m}{3}\right)y' + (6 - 8m^2)x - 4m$ \Rightarrow đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có phương trình là: $y = (6 - 8m^2)x - 4m$</p> | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>$d(O, \Delta) = \frac{ -4m }{\sqrt{(6 - 8m^2)^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5m^2 = (6 - 8m^2)^2 + 1 \Leftrightarrow 64m^4 - 101m^2 + 37 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = \frac{37}{64} \end{cases}$</p> | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \frac{\sqrt{37}}{8} \end{cases}$ Đối chiếu với đk(*) ta có $m = \pm 1$ là kết quả cần tìm.</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |
|---------|---|-----|
| Câu II | 1. Đk: $x \neq \frac{p}{2} + kp, k \in Z$ | 0,5 |
| | $pt \Leftrightarrow \frac{8\sin^3 x \cos x + 4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{2\cos x} = \sin 3x - 2\cos 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 4\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1(\text{loại}) \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{p}{3} + k2p \Leftrightarrow x = \pm \frac{p}{6} + kp$ | 0,5 |
| | Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \pm \frac{p}{6} + kp, k \in Z$ | |
| | 2. Đặt $\sqrt{2x+3} = u; \sqrt[3]{x-2} = v$, đk: $u \geq 0$ khi đó ta có hệ: | 0,5 |
| | $\begin{cases} u - 2v = 1 \\ u^2 - 2v^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 1 \\ (2v+1)^2 - 2v^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 1 \\ v^3 - 2v^2 - 2v + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 1 \\ (v-1)(v^2 - v - 3) = 0 \end{cases}$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 + \sqrt{13} \\ v = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 - \sqrt{13}(\text{loại}) \\ v = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ | 0,5 |
| | + với $\begin{cases} u = 2 + \sqrt{13} \\ v = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} \sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{13} \\ \sqrt[3]{x-2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 + 2\sqrt{13}$ | 0,5 |
| | + với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$ ta được $x = 3$ | 0,5 |
| | Vậy hệ có hai nghiệm là: $x = 3; 7 + 2\sqrt{13}$ | |
| Câu III | 1. $\int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9})}{\sqrt{x^2 + 9}} dx - 3 \int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = I_1 - 3I_2$ | 0,5 |
| | + Tính I_1 : Đặt $\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) = u$, ta có: $du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$, $x = 0 \Rightarrow u = \ln 3; x = 4 \Rightarrow u = \ln 5$. Khi đó: $I_1 = \int_{\ln 3}^{\ln 5} u du = \frac{u^2}{2} \Big _{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{\ln^2 5 - \ln^2 3}{2}$ | 0,5 |
| | + Tính I_2 . Đặt $\sqrt{x^2 + 9} = v$, ta có: $dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx, x^2 = v^2 - 9$ $x = 0 \Rightarrow v = 3; x = 4 \Rightarrow v = 5$. Khi đó: $I_2 = \int_3^5 (u^2 - 9) du = \left(\frac{u^3}{3} - 9u \right) \Big _3^5 = \frac{44}{3}$ | 0,5 |
| | Vậy $\int_0^4 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) - 3x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = I_1 - 3I_2 = \frac{\ln^2 5 - \ln^2 3}{2} - 44$ | |
| | 2. $\begin{cases} 3^{x^2+x} - 3^{y^2+y} = \ln y - \ln x(1) \\ x + y + 1 = m\sqrt{2x^2 + 3}(2) \end{cases}$ Đk: $x > 0, y > 0$ | |

+ Giải phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow 3^{x^2+x} + \ln x = 3^{y^2+y} + \ln y$$

Xét hàm $f(t) = 3^{t^2+t} + \ln t$, với $t > 0$, có:

$$f'(t) = (2t+1)3^{t^2+t} \cdot \ln 3 + \frac{1}{t} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm } f(t) \text{ là hàm đồng biến với } t > 0.$$

suy ra: $pt(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

+ Thế $x = y$ vào pt (2) ta được: $x+1 = m\sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow m = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}} \quad (3)$

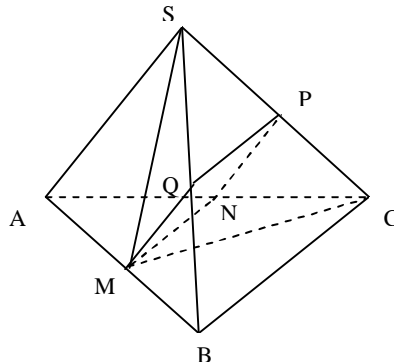
Khi đó: Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow pt(3)$ có nghiệm $x > 0$

Xét hàm $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ với $x > 0$. có: $g'(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{(2x^2+1)^3}}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

| | | | | |
|-----|---------|---|----------------------|----------------------|
| BBT | x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| | $g'(x)$ | + | 0 | - |
| | $g(x)$ | | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | |
| | | 1 | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |

Từ BBT suy ra hệ phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{\sqrt{2}} < m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu IV



+ Gọi M là trung điểm của AB. Từ giả thiết ta có: $\triangle SAB$ và $\triangle SCB$ là các tam giác vuông cân bằng có chung cạnh huyền AB.

$$\Rightarrow SM \perp AB, CM \perp AB \text{ và } SM = CM = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\widehat{SMC} \Rightarrow \widehat{SMC} = 60^\circ$

Từ đó ta có: $AB \perp mp(SCM)$ và $\triangle SCM$ là tam giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

\Rightarrow Thể tích của hình chóp S.ABC:

$$V = V_{SMBC} + V_{SMAC} = \frac{1}{3}(AM + BM) \cdot S_{\triangle SCM} = \frac{1}{3}AB \cdot \frac{1}{2}SM \cdot MC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^3\sqrt{6}}{24} \quad (\text{đvtt})$$

+ Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

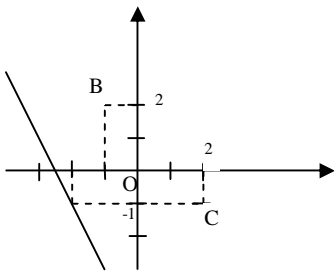
Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, SC, SB ta có :

Góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng góc giữa hai đường thẳng MN và NP. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và AB.

$$\text{Xét tứ giác MNPQ có: } MN = PQ = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}; MQ = NP = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$$

\Rightarrow MNPQ là hình thoi cạnh bằng $\frac{a}{2}$

| | | |
|-----------------|--|-----|
| | <p>Lại có : Trong tam giác đều SCM có MP là đường trung tuyến $\Rightarrow MP = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$</p> <hr/> <p>Từ đó ta có: $\cos \hat{PNM} = \frac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2MN.NP} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos a = \left \cos \hat{PNM} \right = \frac{1}{4}$</p> <p>Vậy thể tích của hình chóp bằng $\frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$ (đvtt) và cô sin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{1}{4}$</p> | 0,5 |
| Câu V. | <p>Đặt $2^a = x; 2^b = y; 2^c = z$, ta có: x, y, z là các số thực dương và $x.y.z = 1$.</p> <p>Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành</p> $\frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + 7} + \frac{y}{y^4 + 2y^2 + 2z^2 + 7} + \frac{z}{z^4 + 2z^2 + 2x^2 + 7} \leq \frac{1}{4}$ <hr/> <p>Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức cô si cho hai và 4 số dương ta được:</p> $x^4 + 3 = x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4x; \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$ <p>Suy ra: $x^4 + 2x^2 + 2y^2 + 7 \geq 4x + 4xy + 4 = 4(x + xy + 1)$</p> <p>Chứng minh tương tự ta được $y^4 + 2y^2 + 2z^2 + 7 \geq 4(y + yz + 1); \quad z^4 + 2z^2 + 2x^2 + 7 \geq 4(z + zx + 1)$</p> $\Rightarrow \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2y^2 + 7} + \frac{y}{y^4 + 2y^2 + 2z^2 + 7} + \frac{z}{z^4 + 2z^2 + 2x^2 + 7} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x + xy + 1} + \frac{y}{y + yz + 1} + \frac{z}{z + zx + 1} \right) \quad (1)$ <hr/> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 0$.</p> <p>Mặt khác: Do $xyz = 1$ nên</p> $\frac{x}{x + xy + 1} + \frac{y}{y + yz + 1} + \frac{z}{z + zx + 1} = \frac{x}{x + xy + 1} + \frac{xy}{xy + xyz + x} + \frac{xyz}{xyz + x^2yz + xy}$ $= \frac{x}{x + xy + 1} + \frac{xy}{xy + 1 + x} + \frac{1}{1 + x + xy} = 1 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 0$</p> | 0,5 |
| Câu VI.a | <p>1.</p> <p>Ta có: Toạ độ của A là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$</p> <p>Gọi $M(x_0; y_0)$ là trung điểm của BC, từ giả thiết ta có: $\begin{cases} MI \perp MA \\ d(M, AC) = d(M, AB) \end{cases}$</p> <hr/> $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \cdot (x_0 - 1) + (y_0 + 1)(y_0 - 1) = 0 \\ \frac{ 2x_0 + y_0 - 3 }{\sqrt{5}} = \frac{ x_0 + 2y_0 - 3 }{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0 + y_0 = 2 \\ x_0^2 + y_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases}$ <hr/> $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y_0 = 2 - x_0 \\ 2x_0^2 - 5x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = 1 \text{ hoặc } x_0 = y_0 = \frac{-1}{2} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ <hr/> <p>+ Với $x_0 = y_0 = 1$ ta có $M \equiv A$ (loại)</p> <p>+ Với $x_0 = y_0 = \frac{-1}{2}$ ta có $M(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2})$</p> <p>$\Rightarrow$ pt đường thẳng BC: $x + y + 1 = 0$ suy ra B(4;-5) ; C(-5;4)</p> | 0,5 |

| | | |
|-----------------|---|----|
| | $+ \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ta có } M(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \text{pt đường thẳng BC: } x - y - 1 = 0 \text{ suy ra } B(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}); C(\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$ | 0, |
| | <p>Vậy $A(1;1), B(4;-5), C(-5;4)$ hoặc $A(1;1), B(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}); C(\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$</p> | |
| | <p>2. $BPT \Leftrightarrow 2^{3x} - 2^{2x^2+6x} + 3.2^{\frac{x^2+9x}{2}-1} \geq 0$ chia cả 2 vế bpt cho 2^{3x} ta được:</p> $-2^{2x^2+3x} + 3.2^{\frac{x^2+3x}{2}-1} + 1 \geq 0.$ | 0, |
| | <p>Đặt $2^{\frac{x^2+3x}{2}} = t, \text{ đk } t > 0$ ta được bpt: $-2t^2 + 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$</p> | 0, |
| | <p>Kết hợp với đk ta được $0 < t \leq 2 \Rightarrow 2^{\frac{x^2+3x}{2}} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$</p> | 0, |
| | <p>Vậy bpt có nghiệm: $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$</p> | |
| Câu VI.b | <p>1.</p>  <p>Nhìn vào hình vẽ ta thấy, hai điểm A, B nằm về cùng một phía đối với đường thẳng: $2x + y + 5 = 0(d)$.</p> <p>Ta có $BC = 3\sqrt{2}$</p> <p>\Rightarrow Chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng $AB + AC$ nhỏ nhất.</p> <p>Gọi B' là điểm đối xứng với B qua đt(d).</p> <p>Khi đó đường thẳng BB' có phương trình: $x - 2y + 5 = 0$</p> <p>Gọi $I = d \cap BB'$ ta có $I(-3;1)$ và I là trung điểm của BB'. Suy ra $B'(-5;0)$</p> <p>đt $B'C$ có pt: $x + 7y + 5 = 0$</p> <p>Khi đó: $AC + AB = AC + AB' \geq B'C$</p> <p><u>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi B', A, C thẳng hàng hay A là giao điểm của $B'C$ và d</u></p> <p>$\Rightarrow A(\frac{-30}{13}; \frac{-5}{13})$</p> <p>Vậy với $A(\frac{-30}{13}; \frac{-5}{13})$ thì tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.</p> | 0, |
| | <p>2. đk: $9^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0(*)$</p> $Bpt \Leftrightarrow x - 1 \geq \log_3 \frac{9^x - 1}{8} \Leftrightarrow 3^{x-1} \geq \frac{9^x - 1}{8} \Leftrightarrow 3.3^{2x} - 8.3^x - 3 \leq 0$ | 0, |
| | <p>Đặt $t = 3^x$, đk $t > 0$. Ta được $3t^2 - 8t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq t \leq 3 \Rightarrow 0 < t \leq 3$</p> | 0, |
| | <p>Khi đó: $0 < 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$</p> <p>Kết hợp với đk (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $0 \leq x \leq 1$</p> | 0, |

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

A. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (8 điểm)

Câu I. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ (1).

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $9x - y + 2 = 0$

Câu II.

- 1) Giải phương trình: $\frac{8\sin^3 x \cos x + \sin 4x}{\cos x} = \frac{3}{2} \tan 2x + \sin x$.
- 2) Giải bất phương trình: $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} \geq 1$.

Câu III.

- 1) Tính tích phân: $\int_1^e \frac{e^{\ln x} - 1}{x} dx$
- 2) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm.
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ my^2 - 2mx + 1 = y \end{cases}$$

Câu IV. Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA = SB = AC = BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$. Tính thể tích hình chóp biết rằng mp(SAB) tạo với đáy một góc bằng 60° .

Câu V. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq -1; b \geq -1; c \geq -1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq a(b+1) + b(c+1) + c(a+1). \text{ Khi nào bất đẳng thức xảy ra?}$$

II. PHẦN TỰ CHỌN (2 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2 điểm)

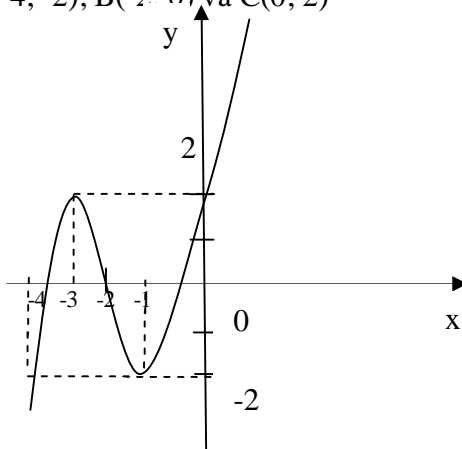
- 1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AB: $x + y - 2 = 0$, các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A và C lần lượt có phương trình là $y = 1$ và $x - y + 2 = 0$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh A, B, C.
- 2) Giải phương trình sau: $8^x - 2.4^x - 2^x + 2 = 0$

B. Theo chương trình Nâng cao

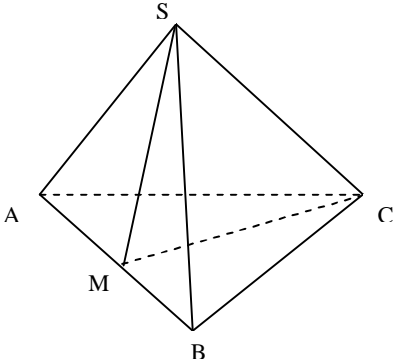
Câu VI.b (2 điểm)

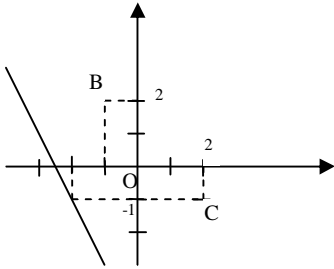
- 1) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có B(-1;2), C(2;-1) và A nằm trên đường thẳng $2x + y + 5 = 0$. Tìm A sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.
- 2) Giải phương trình sau: $x + \log_{\frac{1}{3}}(9^x - 1) = 1 - 3\log_3 2$

-----Hết-----

| Câu | Nội dung | Điểm | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|-----------|-----------|----|----|-----------|-----------|-----------|----|--|---|---|---|---|---|---|-----------|--|---|--|----|-----------|------|
| Câu I | 1. + TXĐ : D=R + Sự biến thiên: $y'=3x^2+12x+9, y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-1)$ - Hàm số đạt cực đại tại $x=-3; y_{cd}=2$, đạt cực tiểu tại $x=-1; y_{ct}=-2$ - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -2+\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | - Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr></table> | x | $-\infty$ | -3 | | -1 | | $+\infty$ | y' | | + | 0 | - | 0 | + | y | $-\infty$ | | 2 | | -2 | $+\infty$ | 0,25 |
| | x | $-\infty$ | -3 | | -1 | | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | y' | | + | 0 | - | 0 | + | | | | | | | | | | | | | | | | |
| y | $-\infty$ | | 2 | | -2 | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Đồ thị: Đi qua các điểm A(-4; -2); B(-2; 0) và C(0; 2) |  | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. Ta có: $9x-y+2=0 \Leftrightarrow y=9x+2$ (d) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng nên có hệ số góc bằng: $y'(x_0)=9 \Leftrightarrow 3x_0^2+12x_0+9=9$ | | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\Leftrightarrow x_0^2+4x_0=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=-4 \end{cases}$ | | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | + Với $x_0=0$ ta có: $y_0=2 \Rightarrow pttt: y=9x+2$ (loại do trùng với (d)) + Với $x_0=-4$ ta có: $y_0=-2 \Rightarrow pttt: y=9(x+4)-2$ hay $y=9x+34$ (tm) Vậy có một tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là: | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Câu II | 1. Đk: $\begin{cases} x \neq \frac{p}{2} + kp \\ x \neq \frac{p}{4} + \frac{kp}{2} \end{cases}, k \in Z,$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | pt $\Leftrightarrow \frac{8\sin^3 x \cos x + 4\sin x \cos x \cdot \cos 2x}{\cos x} = \frac{3}{2} \tan 2x + \sin x \Leftrightarrow 4\sin x = \frac{3}{2} \tan 2x + \sin x$ $\Leftrightarrow 3\sin x = \frac{3\sin x \cos x}{\cos 2x} \Leftrightarrow \sin x \cos 2x = \sin x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \cos 2x \end{cases}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|--|------|----------------|---------------|------------|------------|-----------|---------|---|---|---|---|---|--------|---|------------|------------|------------|---|--|--|----------------|---------------|--|--|
| | $+\cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2p \\ 2x = -x + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2p \\ x = \frac{k2p}{3} \end{cases}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $+\sin x = 0 \Leftrightarrow x = kp$ <p>Kết hợp với đk ta có nghiệm của phương trình là: $x = kp$, $x = \frac{k2p}{3}$, với $k \in \mathbb{Z}$</p> | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} \geq 1$, Đk: $-1 \leq x \leq 2$ (*) Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq \sqrt{2-x} + 1 \Leftrightarrow x+1 \geq 3-x+2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow x-1 \geq \sqrt{2-x}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Kết hợp với đk(*) ta có nghiệm của bpt là: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 2$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Câu III | 1. $\int_1^e \frac{e^{\ln x} - 1}{x} dx = \int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x} dx = I_1 - I_2$ + Tính I_1 : Đặt $\ln x = u$, ta có: $du = \frac{1}{x} dx$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = e \Rightarrow u = 1$. Khi đó: $I_1 = \int_0^1 e^u du = e^u \Big _0^1 = e - 1$ | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | + Tính I_2 có: $I_2 = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big _1^e = 1$ Vậy $\int_1^e \frac{e^{\ln x} - 1}{x} dx = e - 2$ | 0,5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 2. $\begin{cases} y - x = 1(1) \\ my^2 - 2mx + 1 = y(2) \end{cases}$ + Từ phương trình (1) ta có $y = x + 1$ thế vào pt (2) ta được : $m(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow m = \frac{x}{x^2 + 1}$ (3) | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Khi đó: Hệ phương trình đã cho có nghiệm \Leftrightarrow pt(3) có nghiệm. Xét hàm $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ với $x \in \mathbb{R}$. có: $g'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <table><tr><td rowspan="4">BBT</td><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>0</td><td>\searrow</td><td>\nearrow</td><td>\searrow</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td><td></td></tr></table> | BBT | x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | $g'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | $g(x)$ | 0 | \searrow | \nearrow | \searrow | 0 | | | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | |
| BBT | x | | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $g'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $g(x)$ | | 0 | \searrow | \nearrow | \searrow | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Từ BBT suy ra hệ phương trình có nghiệm khi $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ | 0,25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | |
|------------------------|--|---|
| <p>Câu IV</p> | <div style="text-align: center;">  </div> <p>+ Gọi M là trung điểm của AB. Từ giả thiết ta có: $\triangle SAB$ và $\triangle SCB$ là các tam giác vuông cân bằng có chung cạnh huyền AB.</p> <p>$\Rightarrow SM \perp AB, CM \perp AB$ và $SM = CM = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$</p> <p>Suy ra góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $\hat{SMC} \Rightarrow \hat{SMC} = 60^\circ$</p> <p>Từ đó ta có: $AB \perp mp(SCM)$ và $\triangle SCM$ là tam giác đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$</p> <p>\Rightarrow Thể tích của hình chóp S.ABC:</p> $V = V_{SMBC} + V_{SMAC} = \frac{1}{3}(AM + BM).S_{\triangle SMC} = \frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}SM.MC.\sin 60^\circ = \frac{a^3\sqrt{6}}{24} (\text{đvtt})$ | <p>0,25</p> <p>0,75</p> |
| <p>Câu V.</p> | <p>Bất được viết lại như sau: $a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq ab + bc + ca + a + b + c$</p> <p>Do $a \geq -1$ nên Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + 1 \geq 2a$, ta có:</p> <p>$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1) \geq a(a+1) = a^2 + a$</p> <p>Tương tự ta được: $b^3 + 1 \geq b^2 + b, c^3 + 1 \geq c^2 + c$</p> <p>Từ đó suy ra: $a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c$</p> <p>Mặt khác áp dụng bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$</p> <p>Từ đó suy ra $a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geq ab + bc + ca + a + b + c$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = c = -1$</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <p>Câu VI.a</p> | <p>1. Ta có: Toạ độ của A là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$</p> <p>Gọi M là trung điểm của AB, từ giả thiết ta có: toạ độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;2)$. Từ đó suy ra: B(-1;3)</p> <p>Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có toạ độ của G là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 1 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(-1;1)$</p> <p>Gọi C($x_0$; y_0) ta có: $\begin{cases} \frac{1 + (-1) + x_0}{3} = -1 \\ \frac{1 + 1 + y_0}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(-3;1)$</p> <p>Vậy A(1;1), B(-1;3), C(-3;1)</p> <p>2. $8^x - 2.4^x - 2^x + 2 = 0$ Đặt $t = 2^x$, đk $t > 0$. pt đã cho trở thành $t^3 - 2.t^2 - t + 2 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (t-2)(t^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$</p> <p>+ với $t = 2$ ta có $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

| | | |
|-----------------|--|------|
| | <p>+ với $t = 1$ ta có $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy pt đã cho có 3 nghiệm là : $x = 0, x = 1$</p> | 0,25 |
| Câu VI.b | <p>1.</p>  <p>Ta có $BC = 3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình : $x + y - 1 = 0$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}d(A, BC).BC$</p> | 0,25 |
| | <p>Khi đó: Do $A \in \text{đt } 2x + y + 5 = 0$ nên $A(a; -2a - 5)$ $d(A, BC) = \frac{ a - 2a - 5 - 1 }{\sqrt{2}} = \frac{ a + 6 }{\sqrt{2}}$</p> | 0,25 |
| | <p>Từ đó ta có: $S_{\triangle ABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{ a + 6 }{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \Leftrightarrow a + 6 = 4$</p> | 0,25 |
| | <p>$\Leftrightarrow a = -2$ hoặc $a = -10$ Vậy $A(-2; -1)$ hoặc $A(-10; 15)$.</p> | 0,25 |
| | <p>2. đk: $9^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 (*)$ $\text{pt} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 \frac{9^x - 1}{8} \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{9^x - 1}{8} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 3 = 0$</p> | 0,5 |
| | <p>Đặt $t = 3^x$, đk $t > 0$. Ta được $3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -\frac{1}{3}$ (loại) $\Rightarrow t = 3$</p> | |
| | <p>Khi đó : $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ Kết hợp với đk (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $x = 1$</p> | 0,25 |
| | | 0,25 |