

# Composants métalliques fléchis

## Description et schématisation

par **Koffi Aho VERCELLINO**  
Ingénieur de l'École Centrale de Lyon  
Ingénieur Civil du Génie Maritime  
Chef du Service Structures Offshore de Bouygues-Offshore

<b>1. Définitions, domaine d'utilisation et types usuels.....</b>	<b>C 2 552 - 2</b>
<b>2. Relations fondamentales et caractéristiques des poutres.....</b>	<b>— 5</b>
2.1 Moment fléchissant.....	— 5
2.1.1 Relations et caractéristiques principales .....	— 5
2.1.2 Résistance plastique d'une section .....	— 7
2.1.3 Effet de l'effort normal sur la résistance plastique d'une section ..	— 8
2.1.4 Déformations .....	— 9
2.1.5 Flexion biaxiale ou déviée .....	— 10
2.2 Effort tranchant.....	— 10
2.2.1 Relations avec le moment fléchissant et les charges appliquées ..	— 10
2.2.2 Contraintes dues à l'effort tranchant .....	— 11
2.2.3 Déformations dues à l'effort tranchant.....	— 13
2.2.4 Incidence de l'effort tranchant sur la résistance plastique d'une section.....	— 13
2.2.5 Centre de cisaillement d'une section .....	— 14
2.3 Torsion .....	— 15
2.3.1 Torsion libre ou uniforme .....	— 15
2.3.2 Torsion gênée.....	— 16
2.3.3 Torsion mixte .....	— 17
<b>Pour en savoir plus.....</b>	<b>Doc. C 2 556</b>

**A**près avoir présenté les composants métalliques dans leur conception et leur dimensionnement [C 2 550] et étudié les composants métalliques tendus et comprimés [C 2 551], nous nous intéressons ici aux composants métalliques fléchis avec :

- [C 2 552] « Description et schématisation » ;
- [C 2 553] « États limites et critères de dimensionnement » ;
- [C 2 554] « Assemblages » ;
- [C 2 555] « Conception » ;
- [Doc. C 2 556] « Pour en savoir plus ».

Les composants fléchis représentent les éléments les plus répandus en construction métallique. Leur conception repose sur la théorie des poutres dont les hypothèses et résultats essentiels sont exposés dans ce premier article.

Les distributions des contraintes et déformations induites par les sollicitations élémentaires — moment fléchissant, effort tranchant, moment de torsion — sont décrites. Les notions de résistances élastique et plastique sont introduites.

# 1. Définitions, domaine d'utilisation et types usuels

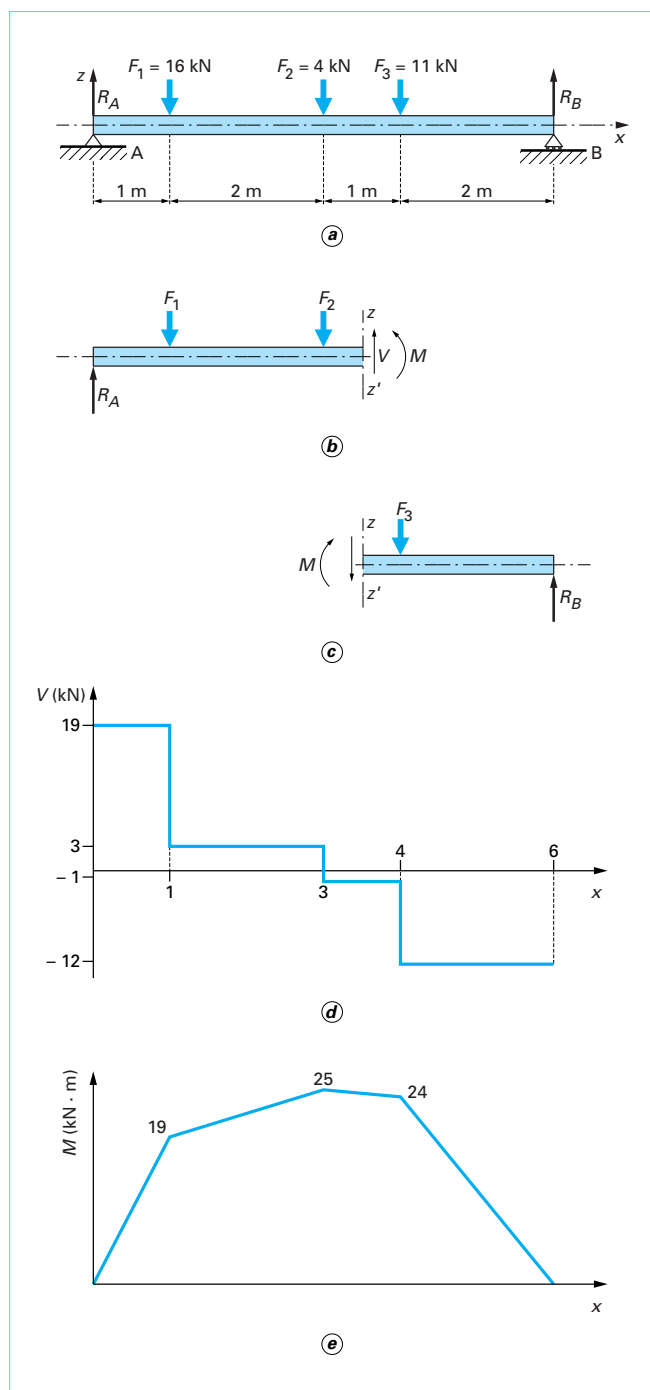


Figure 1 – Exemple d'une poutre plane horizontale

Le composant fléchi fondamental est aussi appelé « **poutre** ». C'est typiquement un élément de structure unidirectionnel qui transmet vers des appuis des charges transversales à sa fibre moyenne. La figure 1a illustre le cas d'une poutre plane horizontale soumise à des charges verticales situées dans son plan de symétrie. La poutre dans son ensemble est en équilibre sous l'effet des forces externes appliquées et des réactions  $R_A$  et  $R_B$  aux appuis. De même, toute partie de la poutre se trouve en équilibre avec toutefois des systèmes différents de forces.

Isolons par exemple la partie de la poutre située à gauche d'une section quelconque  $z-z'$  à l'abscisse  $x$  comme sur la figure 1b. Cette partie est en équilibre sous l'effet des forces externes qui y sont appliquées en incluant bien sûr les réactions et les forces internes appliquées dans la section  $z-z'$ . Ces forces internes comprennent l'effort tranchant  $V$  et le moment fléchissant  $M$ . L'équilibre des efforts permet de déterminer l'effort tranchant  $V$  en faisant la somme algébrique des forces externes appliquées à gauche de la section  $z-z'$  considérée et le moment fléchissant  $M$  en effectuant la somme algébrique des moments des forces externes appliquées à gauche de la section  $z-z'$  considérée.

Nous pouvons tout aussi bien considérer la partie droite de la poutre comme sur la figure 1c ; les efforts internes dans ce cas ont très exactement des valeurs opposées aux efforts internes s'appliquant à la partie gauche.  $V$  et  $M$  sont appelés éléments de réduction dans la section  $z-z'$  des forces externes appliquées à la poutre. En déterminant  $V$  et  $M$  dans chaque section de la poutre, on obtient respectivement les courbes d'effort tranchant et de moment fléchissant comme illustrées sur les figures 1d et e.

L'étude des poutres planes consiste donc essentiellement à :

- déterminer les sollicitations d'effort tranchant et de moment fléchissant ;
- trouver les formes et dimensions permettant de résister de façon adéquate à ces efforts internes.

Le principe d'étude est identique pour une poutre quelconque dans l'espace sauf que les éléments de réduction à déterminer sont au nombre de 6 et comprennent (figure 2) :

- un effort normal  $N_x$  suivant  $Gx$  ;
- deux efforts tranchants  $V_y$  et  $V_z$  suivant respectivement les axes  $Gy$  et  $Gz$  ;
- deux moments fléchissants  $M_y$  et  $M_z$  autour respectivement des axes  $Gy$  et  $Gz$  ;
- un moment de torsion  $T$  autour de l'axe  $Gx$ .

Les composants fléchis ou poutres représentent les éléments les plus répandus en construction métallique. Dans un bâtiment métallique classique comme celui de la figure 3, les composants fléchis de l'ossature extérieure s'appellent pannes, fermes, empannons, lisses, poteaux.

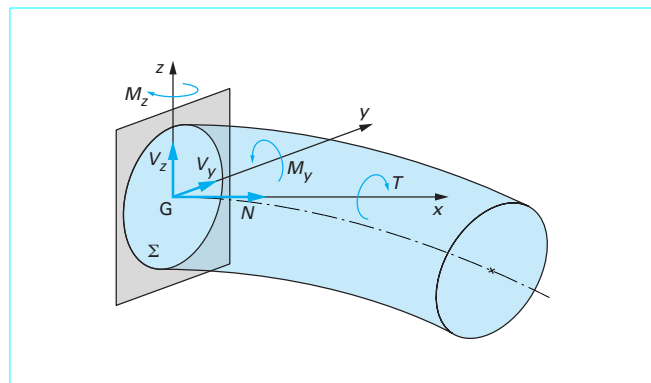


Figure 2 – Éléments de réduction dans une section de poutre

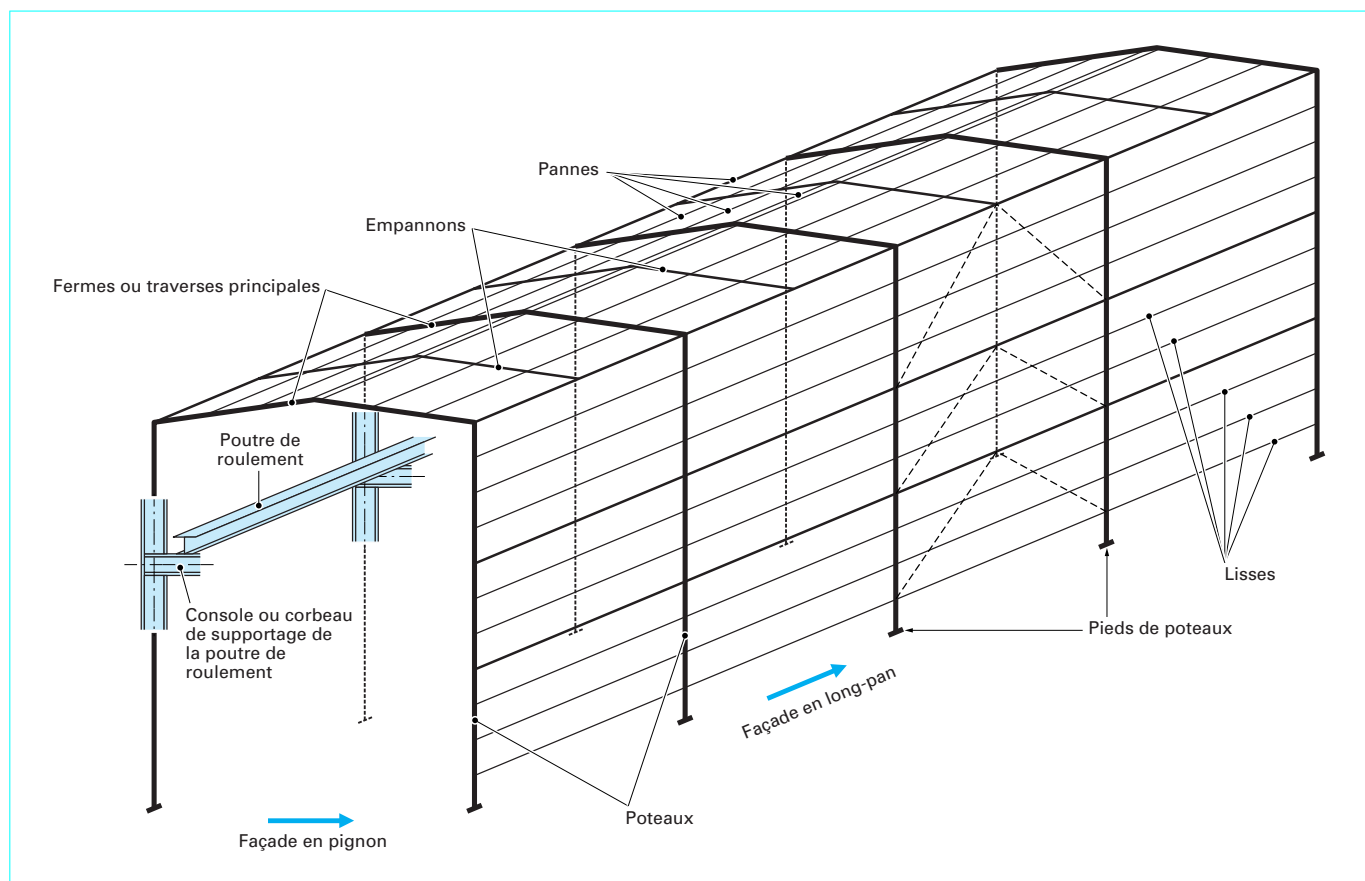


Figure 3 – Composants fléchis dans un bâtiment métallique classique

Les **pannes** sont des poutres qui reprennent les charges permanentes des éléments de couverture ainsi que les surcharges sur la toiture (vent, neige, etc.) et les transmettent aux fermes du bâtiment. Les **fermes** à leur tour transmettent les réactions des pannes aux **poteaux** qui descendent ces charges vers les fondations. Par ailleurs, fermes et poteaux constituent des ensembles continus appelés portiques qui assurent la stabilité transversale du bâtiment, c'est-à-dire qu'ils doivent permettre de résister aux efforts transversaux exercés par le vent ou le séisme sur l'ouvrage.

Un **empannon** est une poutre qui sert à diviser l'intervalle entre deux fermes de façon à réduire la portée des pannes et à en optimiser l'équarissage.

Dans les façades, les **lisses** sont des poutres horizontales qui ont pour fonction de supporter les éléments de bardage et de transmettre aux poteaux et montants les surcharges de vent s'appliquant sur la surface du bardage. Les lisses peuvent servir aussi de barres de contre-flambement aux poteaux.

À l'intérieur des bâtiments industriels, on trouve souvent des **poutres de roulement** sur lesquelles se déplacent des ponts roulants. Les poutres de roulement doivent reprendre les charges verticales mobiles du pont roulant et de sa charge ainsi que les efforts horizontaux engendrés par ses différents mouvements.

De manière générale, les planchers sont constitués d'un réseau de poutres fléchies. La figure 4 illustre une poutraison typique de plancher constitué de poutres reprenant les charges permanentes d'équipements et les surcharges d'exploitation. Les poutres secondaires appelées **solives** ramènent les charges sur les poutres prin-

cipales appuyées sur les poteaux. Autour d'une ouverture ou trémie, les poutres de bordure s'appuyant sur les solives sont appelées **chevêtres**.

Tous les types de pont utilisent des composants fléchis : c'est bien entendu les éléments porteurs principaux (poutres latérales, pièces de pont) des ponts-poutres (figure 5) mais ce sont aussi les tabliers et poteaux des ponts suspendus ou haubanés (figure 6).

Les assemblages ou systèmes de transmission des efforts entre les différents éléments d'une ossature métallique sont des lieux privilégiés où peuvent se développer des moments fléchissants qu'il faut reprendre. Ce sont par exemple les cas des jonctions tubulaires soumises à des efforts excentrés (figure 7), d'une platine d'extrémité d'une poutre rigidement liée à un poteau (figure 8) ou de la plaque d'assise d'un pied de poteau encastré (figure 9).

Toutes les poutres se ramènent à l'un ou l'autre des trois types suivants :

- poutres à âme pleine (figure 10a) ;
- poutres en treillis (figure 10b) ;
- poutres échelles appelées aussi poutres Vierendeel (figure 10c).

Dans les **poutres à âme pleine**, les semelles permettent de reprendre le moment fléchissant alors que l'âme sert à reprendre l'effort tranchant et à relier les semelles afin d'assurer la continuité de la section. Dans les **poutres treillis**, les membrures tiennent lieu de semelles alors que les diagonales et montants assurent les fonctions de l'âme. Les **poutres Vierendeel** ne comportent aucune

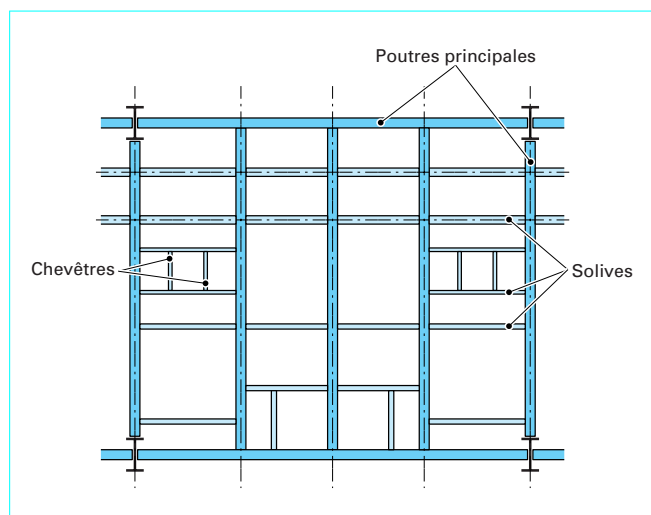


Figure 4 – Poutraison typique ou tramage d'un plancher

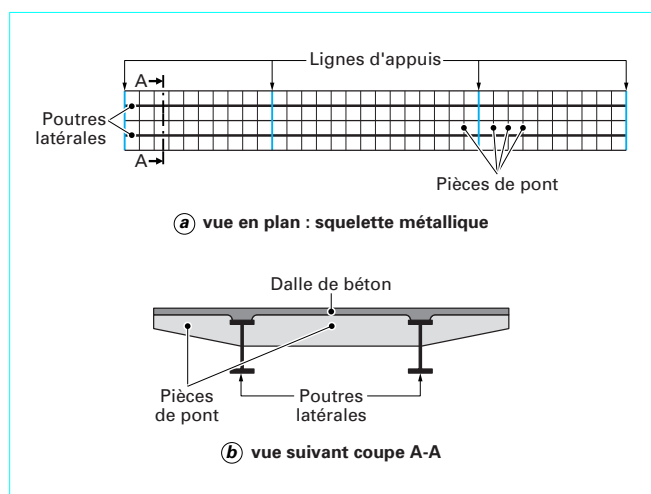


Figure 5 – Exemple de pont de type bipoutre métallique

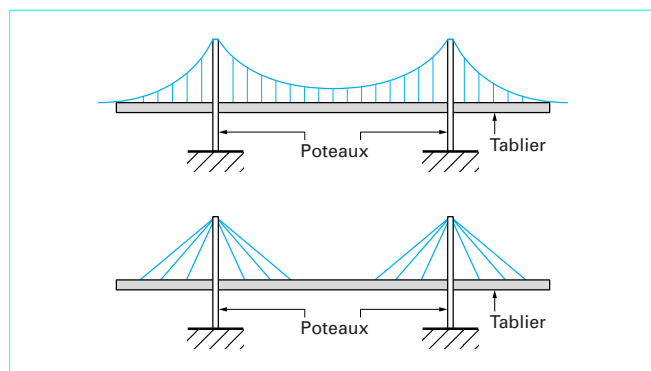


Figure 6 – Ponts suspendu et haubané

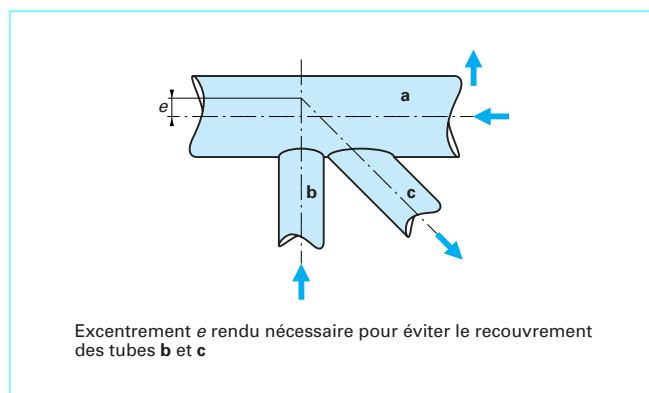


Figure 7 – Jonction tubulaire d'un treillis

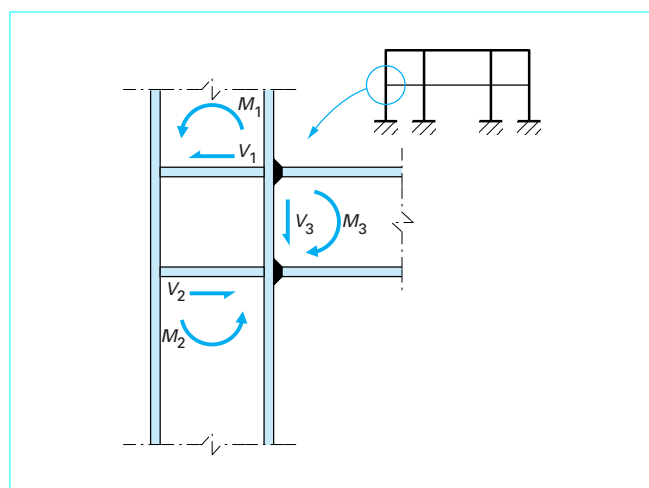


Figure 8 – Liaison rigide soudée poutre-poteau

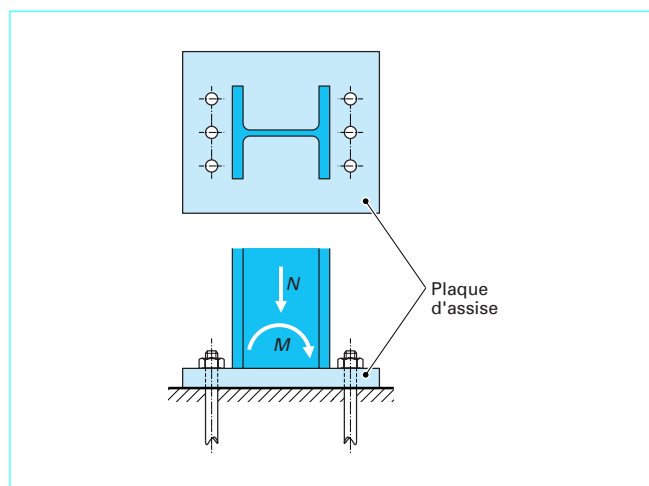


Figure 9 – Pied de poteau encastré

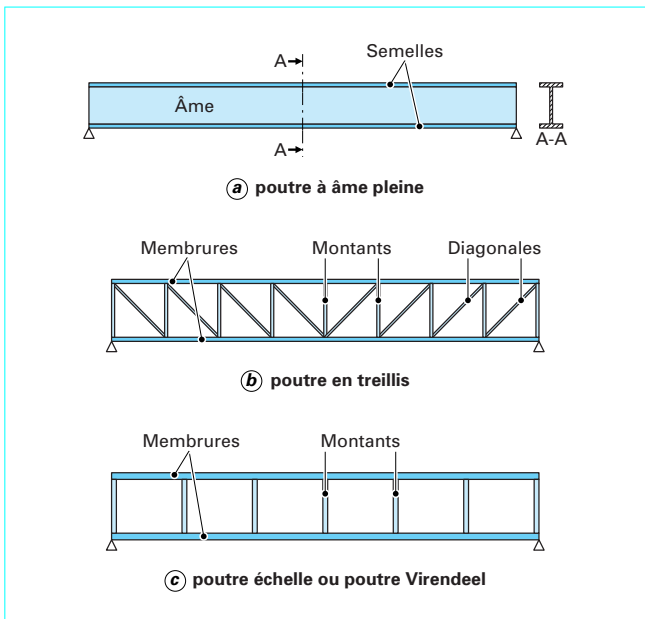


Figure 10 – Principaux types de poutre

diagonale ; la résistance à l'effort tranchant et la continuité de la section sont obtenues par une liaison rigide entre montants et membrures transmettant localement des moments de flexion non négligeables.

## 2. Relations fondamentales et caractéristiques des poutres

Les relations établies dans l'article [C 2 551] pour les composants simples soumis uniquement à un effort normal  $N$  sont également valables pour les composants complexes soumis à des torseurs complets d'efforts (cf. figure 2). Nous nous intéressons par conséquent ici au traitement des autres types de sollicitation interne.

### 2.1 Moment fléchissant

#### 2.1.1 Relations et caractéristiques principales

Considérons le cas de flexion pure où une poutre est soumise à un moment fléchissant constant le long de sa fibre moyenne. Le dispositif de la figure 11 permet par exemple de réaliser en pratique une situation de flexion pure sur le tronçon AB. Dans l'état non déformé de la poutre et dans le plan de flexion, la trace des sections sont des droites perpendiculaires à l'axe neutre et aux fibres longitudinales de la poutre. Sous l'effet du moment fléchissant  $M$  constant, l'expérience montre que les sections demeurent droites mais tournent de façon à demeurer perpendiculaires aux fibres longitudinales déformées. La figure 12 illustre la déformée de la poutre et va nous permettre d'établir la première relation fondamentale des poutres.

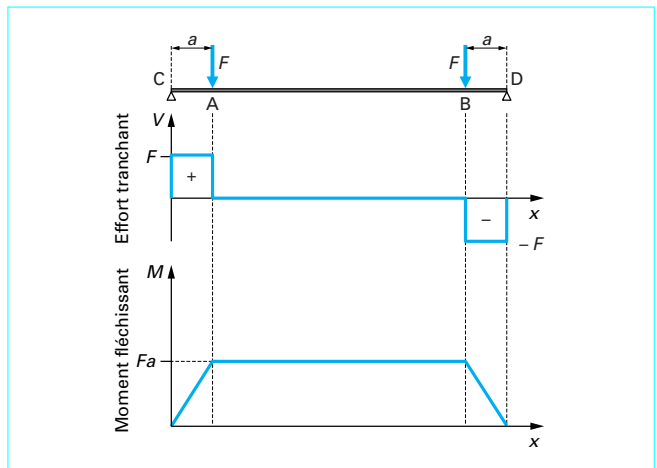
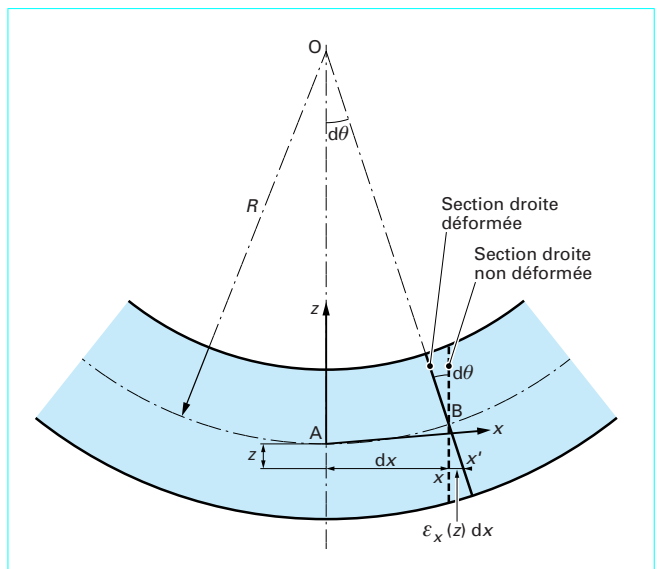
Figure 11 – Exemple de flexion pure ( $M$  constant) sur le tronçon de poutre AB

Figure 12 – Déformée d'une poutre soumise à de la flexion pure

Soit  $\varepsilon_x(z)$  l'allongement unitaire de la fibre longitudinale située à la cote  $z$  ; l'élongation de la fibre vaut par conséquent  $\varepsilon_x(z) dx$ . Par ailleurs, on désigne par  $d\theta$  (figure 12) la rotation élémentaire de la section située à l'abscisse  $x + dx$  par rapport à la section à l'abscisse  $x$ . Les triangles OAB et Bxx' étant semblables, on peut écrire que :

$$\varepsilon_x(z) dx = z d\theta \quad (1)$$

En remarquant que  $dx = R d\theta$  où  $R$  est le rayon de courbure, on tire de l'équation (1) la relation fondamentale du comportement d'une section sous flexion pure :

$$\varepsilon_x(z) = \frac{z}{R} \quad (2)$$

La relation (2) est valable aussi bien dans le domaine élastique que dans le domaine plastique sous l'hypothèse de Navier Bernouilli.

En supposant que toutes les sections de la poutre demeurent dans le domaine élastique, la loi de Hooke s'applique :

$$\sigma_{fx}(z) = E\varepsilon_x(z) = \frac{Ez}{R} \quad (3)$$

avec  $E$  module d'Young.

En intégrant cette distribution de contraintes sur toute la surface de la section et en écrivant les équations d'équilibre entre efforts appliqués et efforts internes, on obtient :

— équilibre des forces :

$$\int_A \sigma_{fx}(z) dA = 0 \Leftrightarrow \int_A \frac{E}{R} z dA = 0 \Leftrightarrow \int_A z dA = 0 \quad (4)$$

— équilibre des moments :

$$\int_A \sigma_{fx}(z) z dA = \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = M \quad (5)$$

La relation (4) permet de déterminer l'axe neutre élastique : le moment statique de la section par rapport à cet axe est nul.

En constatant que  $\int_A z^2 dA$  est le moment d'inertie  $I_y$  de la section par rapport à l'axe de flexion  $y$ , on déduit de (5) la relation fondamentale entre le moment fléchissant et le rayon de courbure dans le domaine élastique :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y} \quad (6)$$

Le rayon de courbure  $R$  est constant puisque  $M$  est constant ; c'est pourquoi la flexion pure est aussi appelée flexion circulaire. De (6) et (3), on obtient la distribution de **contraintes de flexion** en fonction du moment fléchissant appliqué :

$$\sigma_{fx}(z) = \frac{Mz}{I_y} \quad (7)$$

Dans une section donnée, la distribution des contraintes est triangulaire comme celle des déformations unitaires (figure 13). Les contraintes maximales sont atteintes sur les fibres extérieures de la poutre. Pour la suite, nous adopterons les conventions usuelles suivantes : le moment appliqué est positif s'il tend à comprimer les fibres longitudinales supérieures de la poutre et à tendre les fibres inférieures. Les contraintes de traction sont positives et les contraintes de compression sont négatives.

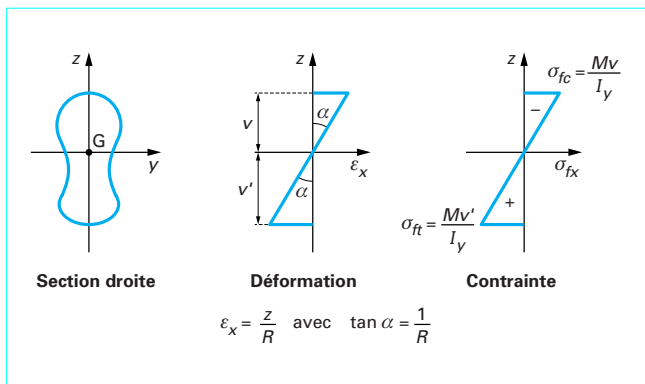


Figure 13 – Distribution des déformations et des contraintes dans une section

En désignant respectivement par  $v$  et  $v'$  les distances des fibres supérieure et inférieure à l'axe neutre, les contraintes maximales en traction  $\sigma_{ft}$  et en compression  $\sigma_{fc}$  valent en valeur absolue :

$$\begin{aligned} \sigma_{fc} &= \frac{Mv}{I_y} = \frac{M}{(I_y/v)} \\ \sigma_{ft} &= \frac{Mv'}{I_y} = \frac{M}{(I_y/v')} \end{aligned} \quad (8)$$

La plus petite des valeurs de  $I_y/z$  est appelée **module d'inertie élastique** de la poutre par rapport à l'axe de flexion  $y$  :

$$W_y = \min \left( \frac{I_y}{v} ; \frac{I_y}{v'} \right) \quad (9)$$

La contrainte maximale en valeur absolue dans une section soumise à un moment de flexion est donnée par la relation :

$$\sigma_{fmax} = \frac{M}{W_y} \quad (10)$$

$M$  étant le moment fléchissant de calcul résultant des combinaisons d'actions (cf. [C 2 550] § 2.1.2.1), la contrainte maximale ne doit pas dépasser la limite élastique du matériau  $f_y$  ; l'équarissage de la poutre dans le domaine élastique consiste donc à vérifier la relation :

$$\sigma_{fmax} = \frac{M}{W_y} \leq f_y$$

ou sous une forme équivalente :

$$M \leq W_y f_y = M_y \quad (11)$$

où  $M_y$  est appelé moment élastique de flexion de la section.

Ensuite de toutes les formes et dimensions possibles, on choisit, sauf exigences particulières liées au parti constructif, la **section la plus économique** c'est-à-dire la section permettant d'atteindre le module d'inertie souhaité avec l'aire la plus faible.

Les sections les plus efficaces sont celles où la matière est rejetée le plus loin possible de l'axe neutre comme on peut le comprendre en examinant l'expression du moment d'inertie. Pour illustrer le propos, considérons le **cas limite théorique** où la section n'est constituée que de deux semelles identiques situées de part et d'autre de l'axe neutre et distantes de  $d$  (figure 14a). Supposons que  $d$  soit fixé pour des raisons d'encombrement. Chaque semelle a une aire de  $A/2$ ,  $A$  étant l'aire totale de la section. On en déduit les caractéristiques suivantes de la section :

$$I_y \approx 2(A/2) (d/2)^2 = Ad^2/4$$

en négligeant l'inertie de chaque semelle par rapport à l'axe parallèle à l'axe  $y$  passant en son milieu, on obtient :

$$W_y = \frac{I_y}{(d/2)} = 0,5 Ad \quad (12)$$

À titre de comparaison, la **section rectangulaire** de même aire  $A$  et même hauteur  $d$  (figure 14b) a pour moment et module d'inertie :

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{bd^3}{12} = \frac{Ad^2}{12} \\ W_y &= \frac{I_y}{(d/2)} = 0,167 Ad \end{aligned} \quad (13)$$

On constate que pour la même dépense d'acier, la section rectangulaire conduit à un module d'inertie élastique trois fois plus petit que celui de la section théorique. La section théorique n'est pas réalisable en pratique car il faut relier les deux semelles pour assurer la continuité de la section et pouvoir reprendre l'effort tranchant : c'est la fonction de la tôle verticale encore appelée âme.

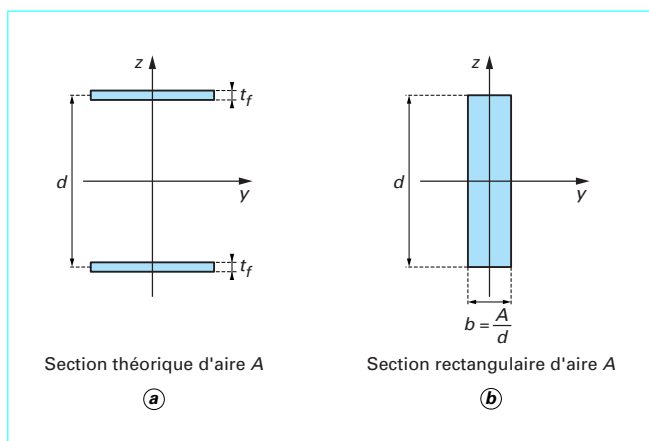


Figure 14 – Sections théoriques et rectangulaires de hauteurs et aires égales

On forme ainsi les **sections dites en double té** (H ou I) qui représentent les sections les plus utilisées en construction métallique. Pour les poutres laminées européennes de la série H, le module d'inertie par rapport à l'axe fort (module d'inertie le plus élevé) est situé dans la fourchette :  $0,30 Ad \leq W_y < 0,39 Ad$ .

Pour comparer l'efficacité des poutres entre elles, on définit une grandeur appelée rendement géométrique  $\rho$  définie par la relation :

$$\rho = \frac{I_y}{A v v'} \quad (14)$$

Pour la section idéale ou théorique  $\rho = 1$  et pour la section rectangulaire  $\rho = 1/3 = 0,333$ . Le rendement des laminés européens de la série H est compris dans la fourchette :  $0,6 \leq \rho < 0,8$  plus proche de la section idéale que de la section rectangulaire très peu efficace au regard de la sollicitation de flexion.

### 2.1.2 Résistance plastique d'une section

Le critère de dimensionnement élastique (11) n'utilise pas la grande ductilité de l'acier, c'est-à-dire sa capacité à subir des défor-

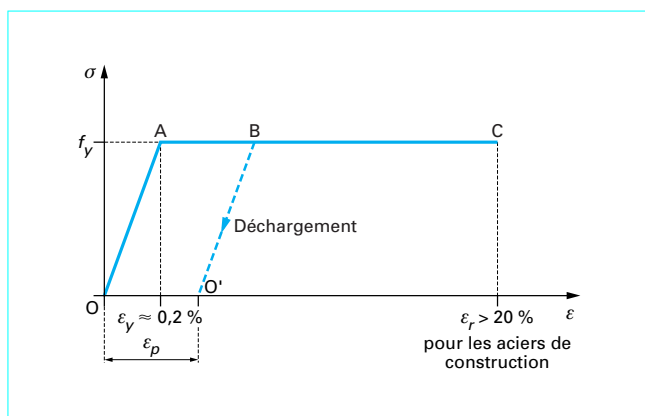


Figure 15 – Loi de comportement élastique-plastique parfait

mations plastiques importantes sans qu'il en résulte nécessairement une ruine. Pour illustrer ce constat, considérons la loi de comportement contrainte-déformation simplifiée d'un acier de construction type représentée par la courbe de la figure 15 ; c'est une idéalisation conservatrice de la loi de comportement réelle donnée en [C 2 551, figure 13].

Suivant cette loi de comportement, tant que la contrainte dans le matériau ne dépasse pas la limite élastique, les déformations sont très petites et réversibles. Au-delà de la limite élastique, on entre dans le domaine plastique où se produisent des déformations importantes à contrainte constante. Tout déchargement intervenant après l'incursion dans le domaine plastique se traduit par des déformations permanentes ou plastiques. Ainsi sur la figure 15, en déchargeant complètement à partir de B, on constate qu'il subsiste une déformation permanente :  $\varepsilon_p = \overline{OO'}$ .

Relions maintenant ce comportement à la relation géométrique fondamentale d'un composant en flexion pure (2) qui nous assure une distribution triangulaire des déformations de la section dans les domaines élastique et plastique. La figure 16 illustre pour une section rectangulaire ce qui se passe lorsque l'on augmente progressivement le moment de flexion, la distribution de contraintes équilibrant à chaque instant le moment de flexion avec une résultante d'effort axial nulle.

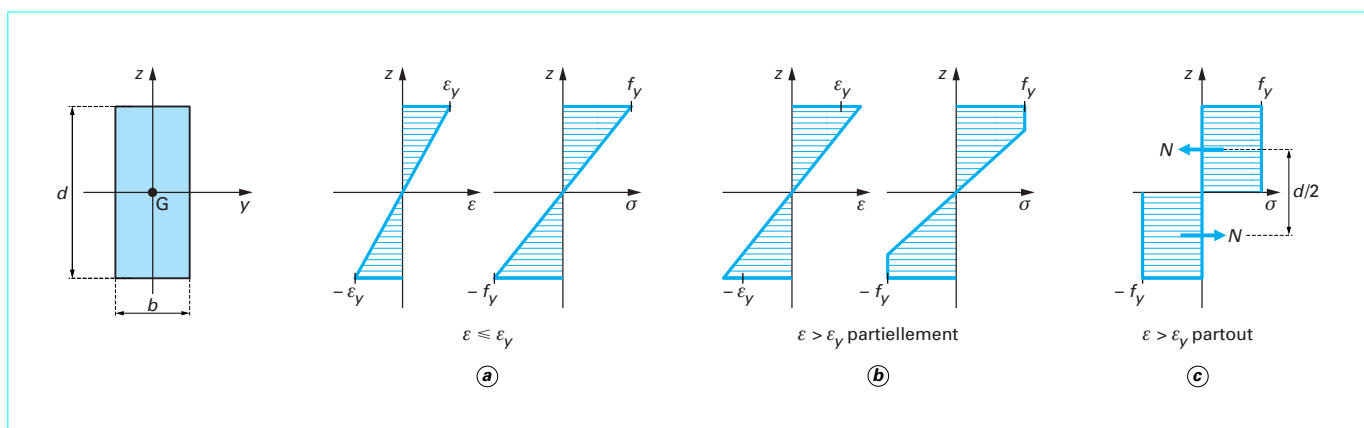


Figure 16 – Évolution des contraintes et déformations dans une section

Dans une première phase (figure 16a) correspondant au domaine élastique, les contraintes sont proportionnelles aux déformations jusqu'à ce que les fibres extérieures atteignent la limite élastique et commencent à plastifier. Ensuite, on entre dans une seconde phase (figure 16b) où coexistent comportements élastique et plastique : la zone de plastification s'étend progressivement vers l'axe de la section au fur et à mesure que les déformations atteignent la déformation élastique limite. La troisième phase intervient lorsque toutes les fibres de la section sont plastifiées. Les déformations plastiques ne sont plus retenues par les déformations élastiques, la section peut subir alors des déformations importantes préjudiciables à la poutre pour le moindre moment fléchissant additionnel ; on dit en général qu'il y a eu formation de rotule plastique.

La résistance ultime réelle de la section est donc le **moment plastique**  $M_{pl}$  correspondant à une plastification complète de la section.  $M_{pl}$  est obtenu en écrivant que la distribution des contraintes de la figure 16c équilibre le moment appliqué :

$$M_{pl} = N \frac{d}{2} = \left( f_y b \frac{d}{2} \right) \frac{d}{2} = f_y \frac{bd^2}{4} \quad (15)$$

Si l'expression du moment plastique n'est pas toujours aussi simple, le résultat est valable pour n'importe quel type de section : l'axe neutre plastique partage la section en deux parties d'aires égales puisqu'il faut que les efforts de compression et de traction obtenus avec une distribution uniforme de contrainte égale à la limite élastique équilibrent le moment fléchissant avec une résultante axiale nulle. De façon générale,  $M_{pl}$  est donné par l'expression :

$$M_{pl} = f_y \int_A z dA = f_y W_{pl} \quad (16)$$

En se référant à l'illustration de la figure 17 pour une section quelconque,  $W_{pl}$  est déterminé comme suit :

- calcul de l'aire de la section ;
- détermination de l'axe neutre plastique ;
- calcul de  $d_1$  et  $d_2$  ;
- calcul de  $M_{pl}$  par la relation :

$$M_{pl} = f_y \frac{A}{2} (d_1 + d_2) \Rightarrow W_{pl} = \frac{A}{2} (d_1 + d_2)$$

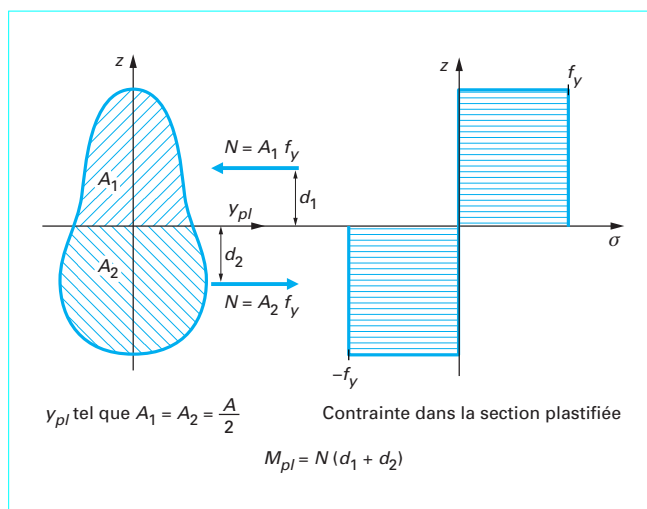


Figure 17 – Schéma de détermination de la résistance plastique d'une section quelconque

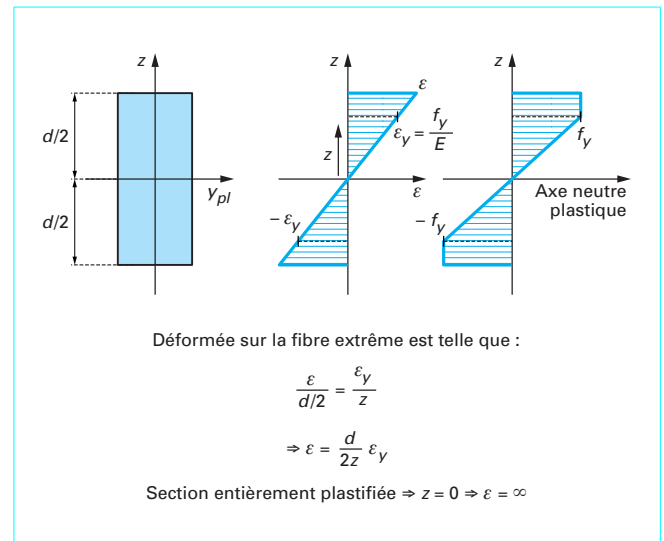


Figure 18 – Déformation théorique à la plastification complète de la section

$W_{pl}$  est appelé **module d'inertie plastique**. C'est une caractéristique intrinsèque des sections au même titre que le module d'inertie élastique ; elle est donnée pour les profils usuels dans les catalogues des sidérurgistes.

En rappelant pour une section rectangulaire l'expression du **moment élastique** :

$$M_{el} = f_y W_{el} = f_y \frac{bd^2}{6},$$

il vient :  $\frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} = 1,5.$

On constate que pour une section rectangulaire, le moment plastique est de 50 % plus élevé que le moment élastique. On mesure tout le gain de matière qui résulte de l'utilisation du moment plastique comme critère de ruine des poutres. Le rapport  $M_{pl}/M_{el}$  est appelé **facteur de forme de la section**. Pour les profils en double té les plus utilisés, le facteur de forme est bien plus faible que pour la section rectangulaire ; il se situe en général dans une fourchette de 1,10 à 1,24.

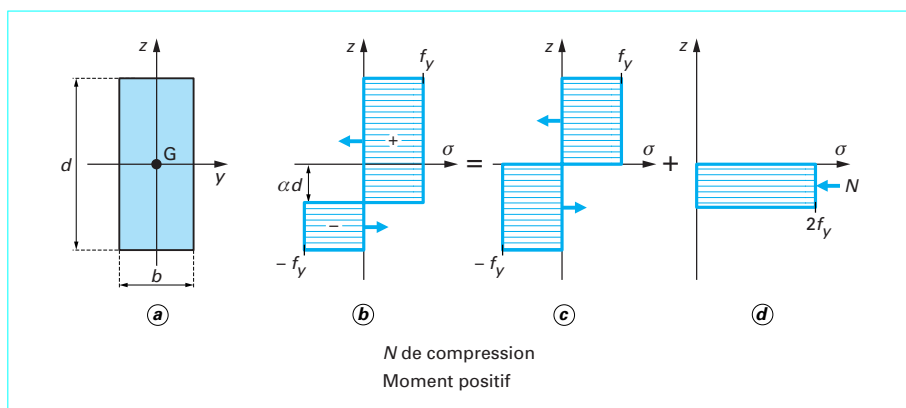
Nous verrons plus loin [C 2 553] que la résistance plastique d'une section, telle que nous venons de la définir, peut ne pas être toujours mobilisée pour au moins deux raisons :

- 1 - des phénomènes d'instabilité de forme des parois peuvent intervenir avant la plastification complète de la section comme nous l'exposons en [C 2 553] ;
- 2 - si l'on considère l'expression de la déformation théorique (figure 18), on constate que la déformation de la fibre située près de l'axe neutre plastique tend vers l'infini, ce qui n'est pas possible dans la réalité.

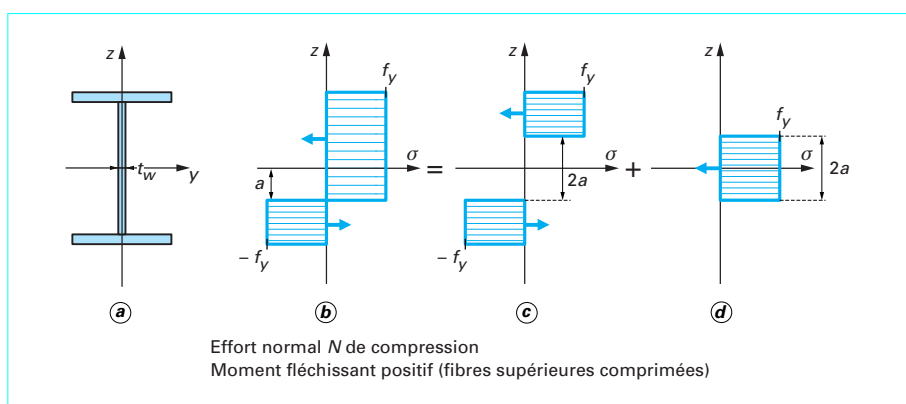
### 2.1.3 Effet de l'effort normal sur la résistance plastique d'une section

La présence d'un effort normal mobilise une partie de la résistance de la section et réduit de ce fait la réserve plastique disponible vis-à-vis du moment fléchissant. Le moment plastique réduit disponible est évalué ci-après successivement pour les cas des sections rectangulaires et en double té.





**Figure 19 – Plastification d'une section rectangulaire en présence d'effort normal  $N$**



**Figure 20 – Plastification d'une section en double té en présence d'effort normal  $N$**

### ■ Cas des sections rectangulaires

La distribution des contraintes normales en présence de l'effort normal  $N$  lorsque la section est entièrement plastifiée est définie par la figure **19b**. En écrivant que la résultante des contraintes équilibre l'effort normal appliqué, on détermine  $\alpha$  :

$$\left(\frac{d}{2} + \alpha d\right) b f_y - \left(\frac{d}{2} - \alpha d\right) b f_y = N \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{N}{2dbf_y} \quad (17)$$

Le moment plastique réduit  $M_{pr}$  est obtenu en décomposant la distribution de la figure **19b** en deux distributions élémentaires, la première (figure **19c**) correspondant à celle d'une section soumise à un moment fléchissant uniquement et la seconde (figure **19d**) correspondant à une distribution fictive équilibrant l'effort normal appliqué :

$$M_{pr} = M_{p0} - \frac{1}{2} \alpha d N = M_{p0} - \frac{1}{2} \alpha d (2f_y \alpha db) = M_{p0} - \alpha^2 d^2 b f_y \quad (18)$$

En se rappelant que  $M_{p0}$  est donné par la relation (15), la relation (18) peut encore s'écrire :

$$M_{pr} = M_{p0} (1 - 4\alpha^2) \quad (19)$$

En désignant par  $N_0 = dbf_y$  l'effort plastique capable de la section lorsqu'elle est soumise à un effort axial uniquement et en utilisant l'expression (17) donnant  $\alpha$ , la relation (19) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{M_{pr}}{M_{p0}} + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 = 1 \quad (20)$$

### ■ Cas des sections en double té

On suppose que l'effort axial est suffisamment faible pour que l'axe neutre demeure dans l'âme de la poutre. La distribution des contraintes normales en présence de l'effort normal est schématisée par la figure **20b** et décomposable en deux distributions élémentaires (figures **20c** et **d**).

L'équilibre de la section avec la distribution de la figure **20d** permet d'écrire que :

$$N = 2at_w f_y \quad (21)$$

On déduit de l'équilibre de la section sous la distribution de la figure **20c** et de la relation (21) le moment plastique réduit  $M_{pr}$  en présence d'effort normal  $N$  :

$$M_{pr} = M_{p0} - \frac{N}{2} a = M_{p0} - \frac{N^2}{4t_w f_y} \quad (22)$$

### 2.1.4 Déformations

Les déformations revêtent un caractère critique pour les états limites de service d'une structure. Dans ces états, toute déformation irréversible doit être évitée. Il en résulte que les déformations sont à évaluer dans le domaine élastique linéaire ; la relation (6) s'applique.

En géométrie différentielle, on montre que la **courbure** ( $1/R$ ) est donnée par la relation suivante valable pour des déplacements  $w$  quelconques :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (23)$$

Pour les petits déplacements qui nous concernent ici, on néglige les termes du second ordre et l'expression précédente devient :

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 w}{dx^2} = w'' \quad (24)$$

Avec la relation (6) et en tenant compte de l'orientation des axes et de la convention de signe sur  $M$ , on déduit l'équation différentielle donnant le déplacement ou la déformée de la fibre neutre d'une poutre soumise à la flexion circulaire :

$$w'' = -\frac{M}{EI_y} \quad (25)$$

En intégrant deux fois, on obtient l'expression de la déformée de la poutre en tout point.

$\theta$  l'angle que fait la tangente à la déformée avec l'axe  $x$  est donné pour les petits déplacements par la relation :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dw}{dx} \quad (26)$$

En intégrant une fois l'équation différentielle (25), on obtient  $\theta$ .

La relation (25) est valable dans le cas général où  $M$  varie. Pour une courbe de moment fléchissant quelconque, l'intégration peut devenir très rapidement fastidieuse. On peut s'en affranchir pour les cas plus usuels en utilisant directement les formulaires de flèches donnés dans les références [3] et [4].

### 2.1.5 Flexion biaxiale ou déviée

Les relations précédentes données pour la flexion pure supposent implicitement que l'axe du moment de flexion est un axe principal d'inertie de la section. Pour un moment quelconque  $M$  appliqué autour d'un axe différent des axes principaux, la procédure classique consiste à décomposer le moment par rapport aux axes principaux, ensuite à déterminer les contraintes et déformations suivant chaque axe principal puis enfin à appliquer le principe de superposition linéaire.

Ainsi dans le cas de la figure 21, la contrainte résultante s'écrit :

$$\sigma = -z \frac{M_y}{I_y} + y \frac{M_z}{I_z} \quad (27)$$

$$M_y = M \cos \theta \text{ et } M_z = M \sin \theta \quad (28)$$

$z$  et  $y$  sont des coordonnées algébriques dont le signe varie suivant le quadrant où l'on se trouve dans le plan orienté de la section (figure 21).

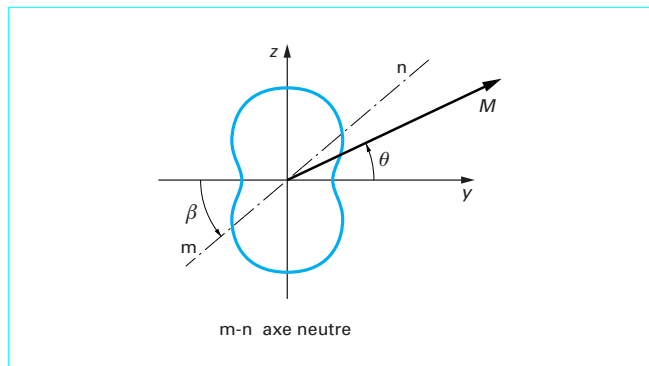


Figure 21 – Section soumise à un moment de flexion déviée

Il est à noter que l'axe neutre pour un moment dont l'axe n'est pas un axe principal d'inertie n'est en général pas confondu avec l'axe du moment de flexion. On le montre aisément en rappelant que l'axe neutre est obtenu pour  $\sigma = 0$  ; on déduit alors des relations (27) et (28) :

$$\begin{aligned} \sigma = -z \frac{M_y}{I_y} + y \frac{M_z}{I_z} = 0 &\Leftrightarrow z \frac{M_y}{I_y} = y \frac{M_z}{I_z} \\ &\Leftrightarrow z \frac{M \cos \theta}{I_y} = y \frac{M \sin \theta}{I_z} \Leftrightarrow \frac{z}{y} = \frac{I_y}{I_z} \tan \theta \end{aligned} \quad (29)$$

En posant  $\tan \beta = z/y$ , la relation (29) montre que dans le cas général où  $I_y \neq I_z$ , l'angle  $\beta$  est différent de l'angle  $\theta$  d'où le nom de flexion déviée.

## 2.2 Effort tranchant

### 2.2.1 Relations avec le moment fléchissant et les charges appliquées

Si la flexion pure représente un cas limite où l'effort tranchant est nul, le cas général d'une pièce fléchie soumise à des forces transversales quelconques correspond à une situation où se manifestent simultanément des moments fléchissants et des efforts tranchants non nuls.

La relation entre effort tranchant  $V$  et moment fléchissant  $M$  dans le cas de base d'une poutre fléchie s'obtient en écrivant l'équilibre des moments d'un tronçon de poutre élémentaire soumis à une charge répartie  $q(x)$  (figure 22a) dans la section a-a :

$$-M + (M + dM) - (V + dV) dx - q(x) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (30)$$

En négligeant les termes du second ordre ( $dV dx$  et  $q(x) dx^2/2$ ), la relation d'équilibre (30) donne :

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (31)$$

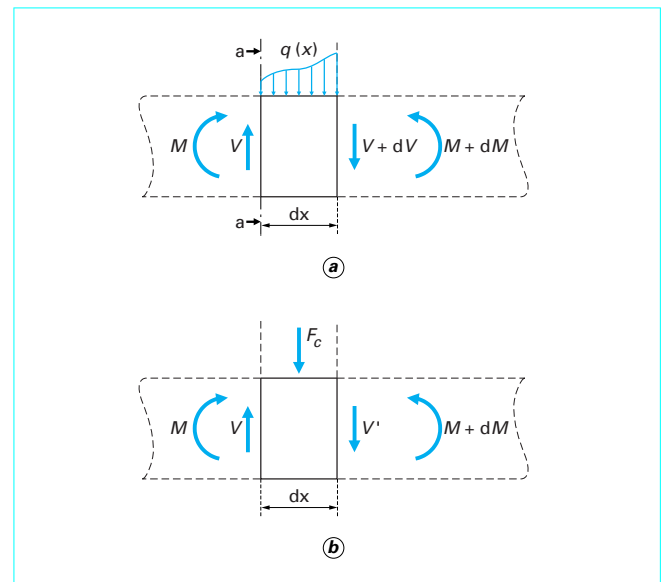


Figure 22 – Équilibre d'un tronçon élémentaire de poutre

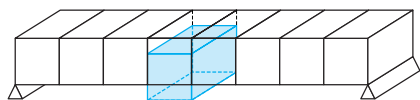


Figure 23 – Poutre horizontale découpée en tronçons par des plans verticaux

La relation (31) montre que l'effort tranchant le long de la poutre est la fonction dérivée du moment fléchissant. On retrouve ainsi le résultat de la flexion pure :  $M$  étant constant, l'effort tranchant est identiquement nul le long de la poutre.

Par ailleurs en écrivant l'équilibre des forces sur le même tronçon de poutre élémentaire, il vient :

$$V - (V + dV) - q(x)dx = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (32)$$

Dans le cas où la charge rencontrée sur le tronçon est une charge concentrée (figure 22b), la relation (32) ne s'applique pas car la variation de l'effort tranchant est discontinue. L'équilibre dans ce cas permet alors d'écrire :

$$V - F_c - V' = 0 \Rightarrow V' = V - F_c \quad (33)$$

## 2.2.2 Contraintes dues à l'effort tranchant

Dans une section donnée, l'effort tranchant développe des **contraintes de cisaillement dans le plan de cette section**, orientées dans la direction de  $V$  et dont la résultante est égale à  $V$ . Une façon de s'en rendre compte est d'imaginer que l'on découpe une poutre horizontale en acier de section rectangulaire en tronçons parallèles à la direction du poids propre comme schématisé sur la figure 23 et parfaitement libres de glisser les uns par rapport aux autres. Sous l'effet du poids propre, rien ne retient les morceaux de glisser les uns par rapport aux autres et de tomber. Cette observation évidente signifie pour la poutre entière où les morceaux ne « tombent » pas qu'il existe une résistance interne au matériau s'opposant aux contraintes de cisaillements et aux glissements des tronçons engendrés par les efforts appliqués comme le poids propre dans notre exemple.

Outre les contraintes de cisaillements parallèles à l'effort  $V$ , la pièce fléchie est aussi le siège de **contraintes de cisaillement parallèles à l'axe longitudinal de la pièce**. Ce phénomène, moins intuitif, peut être mis en évidence en imaginant maintenant une découpe horizontale dans la poutre précédente en deux parties égales libres de glisser l'une sur l'autre (figure 24a). Sous l'effet d'une charge  $F$  appliquée au milieu de la poutre, on observe la déformée de la figure 24b. Les deux parties se comportent comme deux poutres indépendantes, chacune ayant sa fibre supérieure en compression et sa fibre inférieure en traction. À l'interface dans le plan de découpe, il se produit un glissement relatif entre les deux poutres car du côté supérieur, la fibre est en traction alors que du côté inférieur la fibre est en compression. Ce glissement relatif n'existe pas dans la pièce non découpée, ce qui signifie qu'il se développe un système de contraintes de cisaillement parallèles à l'axe longitudinal qui s'opposent à cette déformation.

Les deux systèmes orthogonaux de contraintes de cisaillement que nous venons de décrire ne sont pas indépendants puisque le théorème de Cauchy énonce que les contraintes de cisaillement sur deux facettes perpendiculaires en un point quelconque du matériau sont égales. Ainsi, si l'on considère le carré élémentaire de la figure 25 découpé dans le plan de flexion d'une poutre soumise à de la flexion plane, le théorème de Cauchy permet d'écrire :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (34)$$

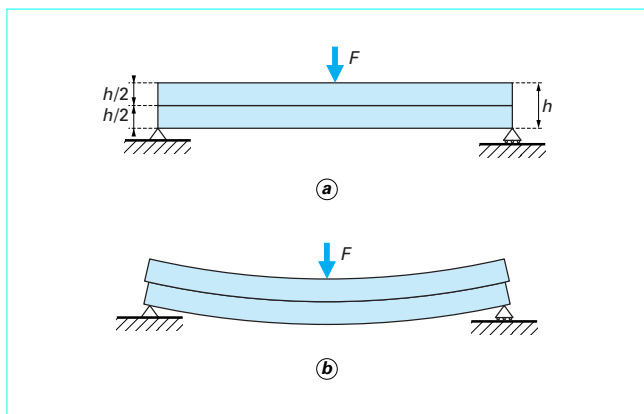


Figure 24 – Déformation de poutre horizontale découpée en deux tronçons horizontaux parallèles

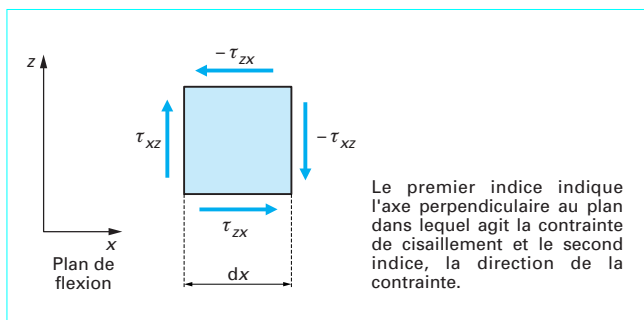


Figure 25 – Contraintes et cisaillement sur un carré élémentaire dans le plan de flexion

Les contraintes de cisaillement en un point d'intersection soit s'écartent, soit convergent.

Le théorème de Cauchy permet de déterminer aisément l'expression de la contrainte de cisaillement en fonction de l'effort tranchant en écrivant la condition d'équilibre des efforts suivant l'axe  $x$  du tronçon élémentaire de poutre abcd de la figure 26a.

Les efforts appliqués suivant l'axe  $x$  comprennent :

— les cisaillements  $\tau_{zx}$  dans le plan cd dont la résultante vaut  $\tau_{zx} b(z) dx$  ;

— les contraintes normales dans le plan ac dont la résultante s'écrit :  $\int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{Mz'}{I_y} dA$  où  $A$  est l'aire de la section droite hachurée sur la figure 26b ;

— les contraintes normales dans le plan bd dont la résultante s'écrit :  $\int_A \sigma_x' dA = \int_A \frac{(M + dM)z'}{I_y} dA$ .

L'équilibre des efforts suivant  $x$  donne :

$$\int_A \frac{(M + dM)z'}{I_y} dA - \int_A \frac{Mz'}{I_y} dA = \tau_{zx} b(z) dx \quad (35)$$

d'où 
$$\tau_{zx} = \frac{dM}{dx} \frac{1}{b(z)I_y} \int_A z' dA$$

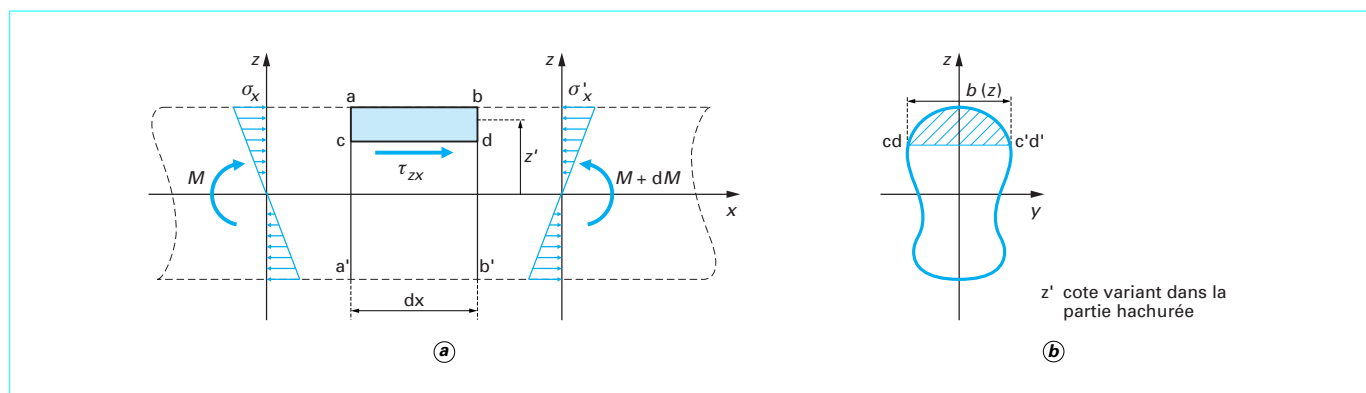


Figure 26 – Équilibre d'un élément de poutre pour la détermination de la contrainte de cisaillement

En se rappelant que  $V = \frac{dM}{dx}$  [relation (31)] et en posant  $S_A = \int_A z' dA$ , la relation (35) peut être transformée pour donner l'expression fondamentale de la contrainte de cisaillement en fonction de l'effort tranchant :

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{VS_A}{b(z)I_y} \quad (36)$$

avec  $b(z)$  largeur de la section où le cisaillement est évalué,  
 $S_A$  moment statique de l'aire hachurée  $A$  par rapport à l'axe neutre  $y$ .

Une expression très utile en pratique est celle de l'effort de glissement par unité de longueur  $g_A$ , réparti le long de  $cd$  :

$$g_A = \tau_{zx} b(z) = \frac{VS_A}{I_y} \quad (37)$$

#### ■ Cas d'une poutre de section rectangulaire

$b(z)$  est constant et égal à  $b$ . Il en résulte que :

$$dA = b dz$$

et 
$$S_A = \int_A z' dA = \int_{-h/2}^{h/2} bz' dz = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

d'où 
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V}{2I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (38)$$

On constate que la distribution des contraintes de cisaillement dans une section rectangulaire est parabolique (figure 27a). La contrainte de cisaillement est nulle au niveau des fibres externes et maximale au niveau de la fibre neutre ( $z = 0$ ) avec :

$$\tau_{xz \max} = \frac{Vh^2}{8I_y} \quad (39)$$

En remplaçant  $I_y$  par sa valeur  $bh^3/12$ ,  $\tau_{xz \max}$  peut se mettre sous la forme :

$$\tau_{xz \max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \tau_m \quad (40)$$

en remarquant que  $bh$  est l'aire de la section et que  $\tau_m = \frac{V}{bh}$  est la contrainte moyenne de cisaillement dans la section.

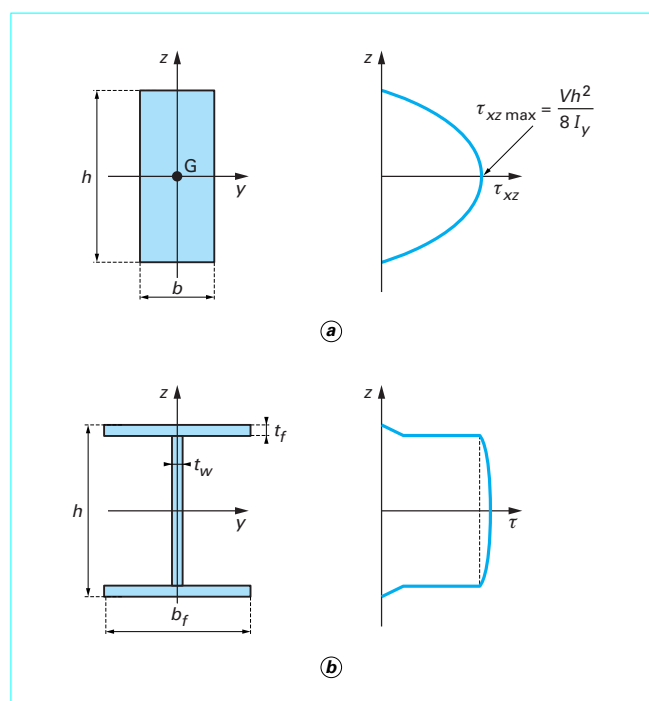


Figure 27 – Exemples de distribution des contraintes de cisaillement

#### ■ Cas d'une poutre de section en double té symétrique

La distribution des contraintes de cisaillement dans une section en double té symétrique à la forme indiquée sur la figure 27b. On y observe deux choses :

- au niveau de la liaison âme-semelle, il y a une forte discontinuité de la contrainte de cisaillement ;
- la contrainte de cisaillement varie peu dans l'âme.

Ces remarques conduisent en pratique à considérer pour les profils et sections en double té utilisés en construction métallique que la contrainte de cisaillement maximale est peu différente de la contrainte moyenne calculée sur la surface de l'âme uniquement  $A_w$  :

$$\tau_{xz \max} = \frac{V}{A_w} \quad (41)$$

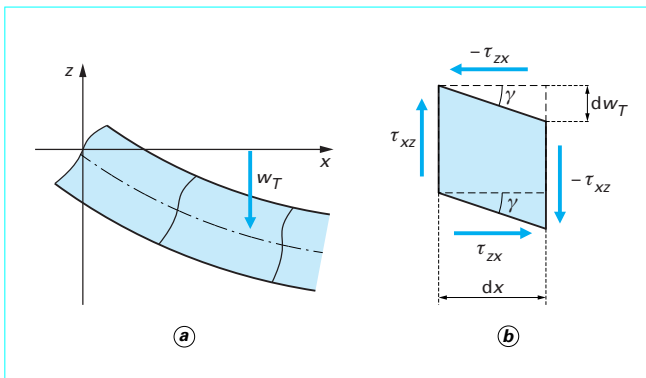


Figure 28 – Déformation d'effort tranchant

### Cas des sections circulaires

Pour une section circulaire pleine, on montre que :

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \tau_m \quad (42)$$

avec  $A$  aire de la section circulaire.

Pour un tube circulaire d'épaisseur  $e$  et de diamètre extérieur  $D$  :

$$\tau_{max} \approx 2 \frac{V}{\pi D e} = 2 \tau_m \quad (43)$$

## 2.2.3 Déformations dues à l'effort tranchant

En un point quelconque de la poutre, le cisaillement provoque un glissement relatif de deux sections voisines comme illustré sur la figure 28b. Le **glissement est représenté par l'angle de distorsion  $\gamma$**  du carré élémentaire. Pour un angle  $\gamma$  petit (hypothèse d'élasticité linéaire), on constate sur la figure 28b que :

$$\gamma = \frac{dw_T}{dx} \quad (44)$$

Par ailleurs,  $\gamma$  est reliée à  $\tau$  par une relation analogue à la loi de Hooke pour les contraintes normales :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (45)$$

avec  $G$  module de cisaillement ou module de Coulomb.

$G$  a pour expression :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec  $\nu$  coefficient de Poisson.

**Exemple** : dans le cas de l'acier,  $\nu \approx 0,3$ ,  $E \approx 210\,000 \text{ N/mm}^2$  et  $G \approx 81\,000 \text{ N/mm}^2$ .

Comme  $\tau$  n'est pas constant dans la hauteur de la section, les sections initialement planes ne restent pas planes après distorsion d'effort tranchant : on parle de gauchissement de la section.

Pour déterminer la contribution de l'effort tranchant à la déformée de la poutre  $w_T$ , on peut procéder de deux manières :

— soit définir une distorsion moyenne dans la section suivant J. Courbon [5] par :

$$\gamma_m = \frac{dw_T}{dx} = \frac{V}{GA_r} \quad (46)$$

avec  $A_r$  section réduite de déformation à l'effort tranchant ;

— soit considérer comme S.P. Timoshenko que la distorsion représentative dans chaque section est la distorsion maximale obtenue au centre de gravité de la section :

$$\gamma_{max} = \frac{dw_T}{dx} = \frac{(\tau_{xz})_{z=0}}{G} = \alpha \frac{V}{GA} \quad (47)$$

où  $\alpha$  est un facteur numérique permettant de passer de la contrainte de cisaillement moyenne à la contrainte de cisaillement maximale dans une section. Par exemple, pour une section rectangulaire,  $\alpha = 3/2$  [relation (40)].

Pour une poutre de section en double té, la distorsion maximale peut être évaluée par la relation :

$$\gamma_{max} = \frac{dw_T}{dx} = \frac{V}{GA_w} \quad (48)$$

avec  $A_w$  aire de l'âme.

La déformée  $w_T$  s'obtient ensuite en intégrant l'une ou l'autre des expressions (46), (47) et (48).

En général, la déformée ou flèche due à l'effort tranchant  $w_T$  est négligeable devant la flèche due au moment de flexion  $w$  ;  $w_T$  représente moins de 5 % de  $w$  pour des poutres dont le rapport portée sur hauteur de la poutre ( $\ell/h$ ) est supérieur à 10.

Signalons toutefois deux exceptions où les déformations dues à l'effort tranchant ne peuvent pas être négligées :

- les poutres « courtes » où le rapport portée sur hauteur de la poutre  $\ell/h$  est inférieur à 5 ;
- les poutres en treillis dont les âmes sont triangulées et donc très déformables.

## 2.2.4 Incidence de l'effort tranchant sur la résistance plastique d'une section

Nous nous limitons ici au cas le plus courant des sections en double té. Soit une section de poutre quelconque soumise à un état de contraintes où coexistent en même temps contraintes normales  $\sigma$  et contraintes de cisaillement  $\tau$ . Le seuil de plastification du matériau est atteint si :

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = f_y^2 \quad (49)$$

La relation (49) est appelée critère de Von Mises ; elle est expérimentalement assez bien vérifiée pour les matériaux métalliques dont l'acier. Par extension, on appelle contrainte équivalente de Von Mises la contrainte définie par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (50)$$

On admet en plasticité comme on le fait dans le domaine élastique que la totalité de l'effort tranchant dans la section est repris dans l'âme de la poutre et que :

$$\tau_1 = \frac{V}{A_w}$$

Il en résulte que la réserve de capacité de l'âme susceptible d'être mobilisée pour le moment fléchissant peut être tirée de la relation (49) :

$$\sigma_1 = \sqrt{f_y^2 - 3\tau_1^2}$$

La contrainte normale de flexion dans l'âme ne peut dépasser  $\sigma_1$ . Il en résulte, lorsque la section est totalement plastifiée en présence d'effort tranchant, la distribution de contraintes normales de

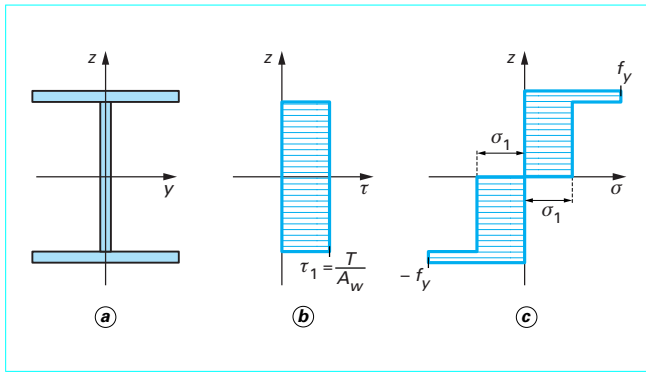


Figure 29 – Résistance plastique d'une section en double té en présence d'effort tranchant

la figure 29. La résistance plastique réduite de la section est par conséquent obtenue par la relation :

$$M_{pr} = M_{p0} - \left( \frac{f_y - \sigma_1}{f_y} \right) M_{pw} \quad (51)$$

avec  $M_{p0}$  résistance plastique de la section totale sous flexion pure,

$M_{pw}$  résistance plastique de l'âme seule sous flexion pure.

### 2.2.5 Centre de cisaillement d'une section

Les charges transversales appliquées à une poutre ne créent seulement des efforts tranchants et des moments fléchissants que si les charges sont rigoureusement appliquées dans un plan de symétrie de la poutre. Pour des charges transversales appliquées dans un plan quelconque, la flexion s'accompagne presque toujours de torsion. C'est une observation évidente pour des sections symétriques comme celle de la figure 30.

Le phénomène est moins évident lorsque l'on considère une section non symétrique comme la section en U de la figure 31a ; des charges appliquées dans le plan vertical passant par le centre de gravité G (comme par exemple le poids propre) créent de la torsion dans le profil. Le moment de torsion créé n'est pas immédiat à obtenir. Pour l'évaluer, il faut introduire la notion de centre de cisaillement de la section.

Le **centre de cisaillement ou centre de torsion C** est un point particulier dans le plan de la section tel qu'un plan vertical de charges passant par ce point ne crée pas de torsion. C'est donc un point neutre vis-à-vis de la torsion d'où son nom.

Pour déterminer la position de C, il faut étudier la distribution et l'équilibre des contraintes de cisaillement dans la section d'où l'autre nom de centre de cisaillement. Considérons le cas de la section en U de la figure 31a. Les parois sont suffisamment minces pour que l'on puisse supposer que les contraintes de cisaillement sont parallèles à la fibre moyenne et constantes dans l'épaisseur. Les contraintes de cisaillement dans l'âme inférieure de la section en U sont obtenues en appliquant la relation (36) :

$$\tau_{xy} = \frac{VS(u)}{t_f I_y}$$

avec

$$S(u) = t_f \frac{h}{2} u$$

d'où

$$\tau_{xy} = \frac{Vh}{2I_y} u \quad (52)$$

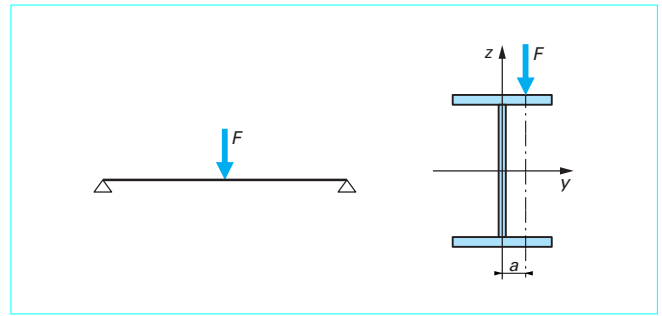


Figure 30 – Moment de torsion induit dans une section doublement symétrique

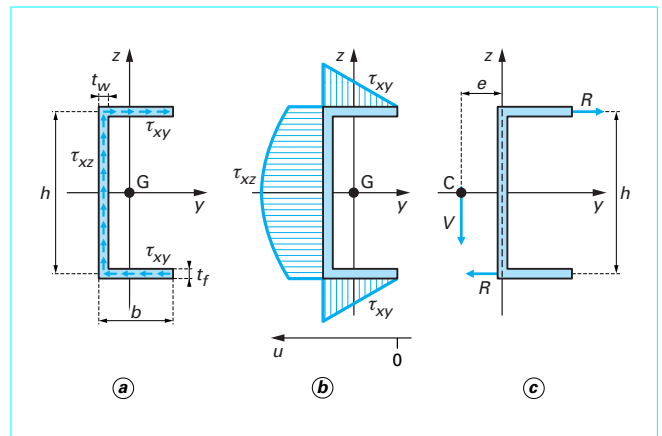


Figure 31 – Équilibre d'une section en U cisailée

La distribution (52) est illustrée sur la figure 31b : la contrainte de cisaillement sur les ailes varie de 0 pour  $u = 0$  à  $\tau_{xy \max} = \frac{Vhb}{2I_y}$ .

La résultante des contraintes de cisaillement dans l'aile inférieure est obtenue en écrivant :

$$R = \int_A \tau_{xy} dA = \int_0^b \frac{Vhu}{2I_y} t_f du = \frac{b^2 h t_f}{4I_y} V \quad (53)$$

On obtient une résultante équivalente dans l'aile supérieure mais de sens opposé. Les contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  réparties dans l'âme suivant l'axe  $z$  équilibrent exactement l'effort tranchant  $V$  dans le plan médian de l'âme. On se retrouve donc avec une section soumise au système d'efforts de la figure 31c, statiquement équivalent à l'effort tranchant  $V$  appliqué à une distance  $e$  de l'axe de l'âme tel que :

$$Ve = Rh = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_y} V \Rightarrow e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I_y} \quad (54)$$

L'expression (54) donne la position du centre de cisaillement ou de torsion C puisque par construction un plan de chargement passant par ce point ne crée pas de moment de torsion dans la section. Tout plan de chargement situé à une distance  $d$  du centre de torsion va donc créer un moment de torsion égal à  $Vd$  ; le centre de cisaillement est aussi appelé centre instantané de rotation en torsion.

On retiendra donc que toute étude de torsion d'une section se fait par rapport au centre de torsion et non par rapport au centre de gravité. Bien entendu, pour les sections symétriques où les centre de gravité et de symétrie sont confondus, le centre de torsion se trouve au centre de gravité. Pour des sections symétriques quelconques, on pourra se reporter à J. Courbon [5] ou aux formules de Roark [4] pour déterminer la position du centre de torsion ou de cisaillement.

## 2.3 Torsion

En construction métallique, la torsion des composants est un phénomène que l'on s'efforce d'éviter ou de réduire au minimum pour la raison essentielle que les profils les plus utilisés sont des profils ouverts (double té, U, cornière) dont les caractéristiques à la torsion sont très faibles. Il en résulte, si la torsion est présente, des déformations importantes préjudiciables à la tenue en service ou à la stabilité de l'ouvrage.

Dans la majorité des cas, on arrive à trouver des dispositifs permettant de ne pas faire « travailler » les composants à la torsion. Des cas notables subsistent toutefois (cas des poutres de roulement) où la torsion est présente et il faut bien en évaluer les effets. Cette évaluation est entièrement conduite dans le domaine linéaire élastique car l'utilisation de la résistance plastique en torsion des composants doit être exclue lors de leur dimensionnement.

La résistance d'un composant à un couple de torsion  $T$  est obtenue par la superposition :

— d'un terme de résistance à la torsion libre de toute déformation  $T_S$  ;

— d'un terme de résistance à la torsion gênée  $T_V$  où les déformations induites par la torsion ne se développent pas complètement du fait de la forme ou des conditions aux limites du composant.

En tout point du composant, on a donc :

$$T = T_S + T_V \quad (55)$$

### 2.3.1 Torsion libre ou uniforme

La torsion libre est encore appelée **torsion de Saint-Venant** du nom de celui qui en a établi le premier les principaux résultats. Le cas de base est celui du composant de section circulaire pleine qui résiste entièrement à un couple de torsion par torsion libre et sans gauchissement des sections planes. Le composant est soumis à un moment de torsion constant  $T$  le long de son axe de symétrie obtenu par exemple en appliquant deux couples égaux et de sens contraires aux deux extrémités (figure 32a).

La déformation est limitée au glissement relatif des sections voisines donc le moment de torsion ne crée dans ce cas que des contraintes de cisaillement. Isolons un petit élément du composant de longueur  $dx$  (figure 32b) et écrivons les conditions d'équilibre et de compatibilité des déformations.

Si  $\gamma$  désigne l'angle de distorsion relative entre deux sections voisines distantes de  $dx$  et  $d\theta$  l'angle de torsion élémentaire dans une section droite, la compatibilité géométrique des déformations permet d'écrire :

$$\gamma dx = r d\theta \Rightarrow \gamma = r \frac{d\theta}{dx} \quad (56)$$

La relation (45) permet de relier la contrainte de cisaillement  $\tau$  à l'angle de distorsion relative  $\gamma$  :

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{d\theta}{dx} \quad (57)$$

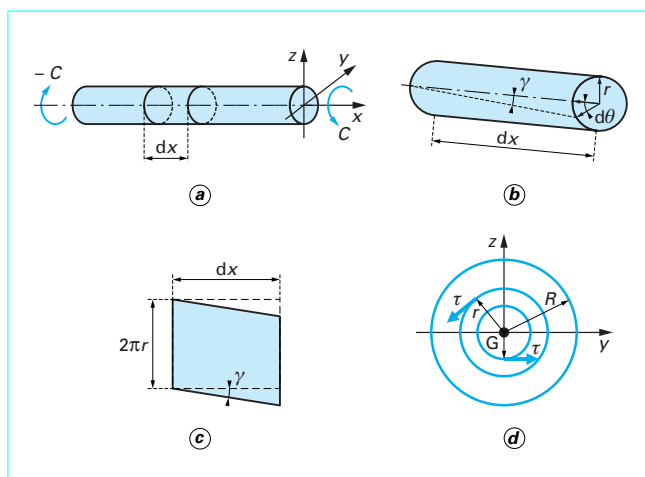


Figure 32 – Torsion d'un composant de section circulaire pleine

Par symétrie, la contrainte de cisaillement est orientée perpendiculairement aux rayons de la section (figure 32d). L'équilibre des moments dans la section permet d'écrire :

$$T = \int_A \tau r dA = \int_A Gr^2 \frac{d\theta}{dx} dA = G \frac{d\theta}{dx} \int_A r^2 dA$$

En constatant que  $\int_A r^2 dA = J$  l'inertie polaire de la section circulaire, on obtient la **relation fondamentale de la torsion libre** :

$$T = GJ \frac{d\theta}{dx} = T_S \quad (58)$$

En éliminant  $d\theta/dx$  des relations (57) et (58), on obtient la distribution des contraintes de cisaillement en fonction du moment de torsion :

$$\tau = Gr \frac{d\theta}{dx} = \frac{Tr}{J} \quad (59)$$

La contrainte de cisaillement atteint sa valeur maximale sur la surface extérieure de la section où  $\tau_{\max} = \frac{TR}{J}$ .

Le moment étant constant, l'intégration de la relation (58) donne la rotation totale de la barre  $\theta$  :

$$\theta = \frac{T\ell}{GJ} \quad (60)$$

avec  $\ell$  longueur du composant.

Pour mémoire, nous rappelons que pour une section circulaire pleine :

$$J = \frac{\pi R^4}{2} \quad (61)$$

Les relations (58), (59) et (60) sont également valables pour un tube de section circulaire ; si  $R_e$  et  $R_i$  désignent respectivement les rayons extérieur et intérieur du tube,  $J$  vaut dans ce cas :

$$J = \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \quad (62)$$

■ Pour des sections pleines non circulaires soumises à un moment de torsion, les sections droites ne restent pas planes et ont tendance à gauchir. Si les sections sont libres de gauchir, on montre que les



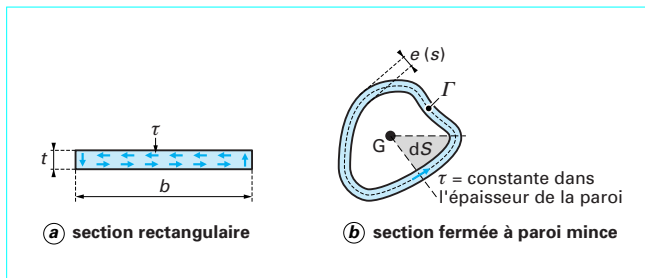


Figure 33 – Cisaillement de torsion dans deux sections particulières

équations d'équilibre et de compatibilité de déformations permettent d'obtenir des relations analogues aux relations (58), (59) et (60) :

$$T = GK \frac{d\theta}{dx} = T_s \quad (63)$$

$$\tau = \frac{Tt}{K} \quad (64)$$

$$\theta = \frac{T\ell}{GK} \quad (65)$$

avec  $K$  constante de torsion de la section, différente de l'inertie polaire pour toutes les sections, autres que circulaires,  $t$  épaisseur de la section.

Pour une section rectangulaire d'épaisseur  $t$  petite devant sa largeur (figure 33a), on montre que :

$$K \approx \frac{bt^3}{3} \quad (66)$$

Les sections ouvertes habituellement utilisées comme les cornières, les simple et double tés, les U sont composées de parois rectangulaires pleines. Il en résulte que pour ces cas :

$$K \approx \sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i^3}{3} \quad (67)$$

avec  $n$  nombre total de parois rectangulaires élémentaires,  $b_i$  et  $t_i$  largeur et épaisseur de la paroi  $i$ .

La contrainte de cisaillement maximale dans chaque paroi est donnée par :

$$\tau_{max} = \frac{Tt_i}{K} \quad (68)$$

■ Pour des sections fermées à parois minces comme celle de la figure 33b, on montre que :

$$K = \frac{4S^2}{\int_{\Gamma} \frac{ds}{e(s)}} \quad (69)$$

$$\tau = \frac{T}{2Se} \quad (70)$$

avec  $S$  aire délimitée par la ligne moyenne  $\Gamma$  de la section (figure 33b),  
 $s$  abscisse curviligne,  
 $e(s)$  épaisseur *a priori* variable le long de  $\Gamma$ .

Les formules (69) et (70) s'appliquent aux profilés en caissons ou aux tubes qu'ils soient circulaires ou non.

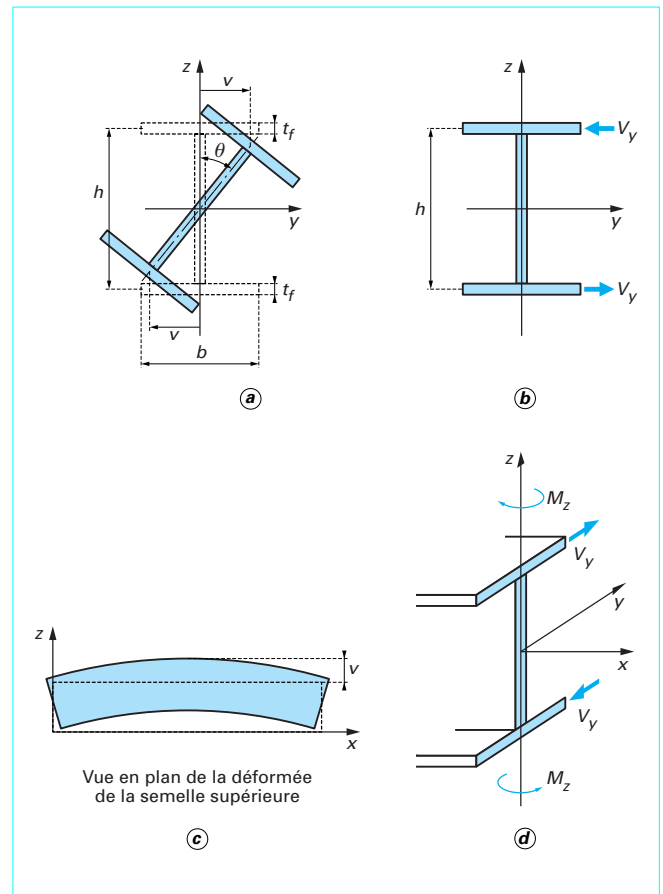


Figure 34 – Torsion gênée d'une poutre de section symétrique en double té

### 2.3.2 Torsion gênée

Un composant de section non circulaire voit ses sections gauchir sous l'application d'un moment de torsion, c'est-à-dire que les sections droites subissent des déformations hors de leur plan initial, dans le sens des fibres longitudinales. Si ces déformations se développent sans entrave, le gauchissement est dit libre et la torsion de Saint-Venant décrit complètement les caractéristiques du composant. Dans le cas plutôt courant où les conditions aux limites ou la configuration du composant empêchent complètement ou partiellement ces déformations de se développer, on dit que le gauchissement est gêné ou encore que la torsion est gênée. Le gauchissement gêné se traduit par des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans les sections de la poutre.

Explicitons ces résultats dans le cas simple d'une poutre de section symétrique en double té. Sous l'effet d'un moment de torsion  $T$ , on constate (figure 34a) qu'une section type de la poutre tourne d'un angle  $\theta$  et que les semelles se déplacent en sens inverse l'une de l'autre d'une valeur  $v$  :

$$v = \theta \frac{h}{2} \quad (71)$$

Ce déplacement de flexion horizontale dans le plan des semelles signifie que chaque semelle est le siège d'un moment de flexion



d'axe vertical  $M_z$  et d'un effort tranchant  $V_y$  reliés à  $v$  par les relations fondamentales des poutres :

$$M_z = -EI_{fz} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (72)$$

$$V_y = \frac{dM_z}{dx} = -EI_{fz} \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (73)$$

avec  $I_{fz}$  moment d'inertie d'une semelle par rapport à l'axe  $z$ .

Les moments fléchissants sur les deux semelles sont égaux mais de signes contraires (figure 34d). Par ailleurs, dans la section (figure 34b), le moment de torsion  $T$  est équilibré par le couple des efforts tranchants sur les semelles :

$$T = V_y h \quad (74)$$

En utilisant les relations (71) et (73), la relation (74) devient :

$$T = -EI_{fz} \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad (75)$$

En introduisant la grandeur  $I_w = I_{fz} \frac{h^2}{2}$ , la relation (75) donne l'expression canonique du couple de résistance de torsion gêlée :

$$T = -EI_w \frac{d^3 \theta}{dx^3} = T_V \quad (76)$$

avec  $I_w$  moment d'inertie de gauchissement.

Dans certains exposés plus formels sur la torsion gêlée, on l'appelle moment d'inertie sectorielle.

Les contraintes de cisaillement de torsion gêlée sont celles développées par les efforts tranchants dans les semelles (figure 35b) ; la distribution est donnée par la relation (38) :

$$\tau_{xy\max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{t_f b_f} \quad (77)$$

Les distributions des contraintes normales dans les semelles sont illustrées sur la figure 35c et la contrainte normale maximale dans les semelles vaut :

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_z}{t_f b_f^2} \quad (78)$$

Le couple de moments fléchissants induit sur les semelles ( $M_z$  ;  $-M_z$ ) est appelé bimoment.

### 2.3.3 Torsion mixte

Dans le cas général, les deux modes de résistance à la torsion coexistent et la rotation de la pièce est obtenue à partir des relations (55), (63) et (76) :

$$T = T_S + T_V = GK \frac{d\theta}{dx} - EI_w \frac{d^3 \theta}{dx^3} \quad (79)$$

C'est une équation différentielle qu'il faut d'abord intégrer afin d'obtenir la rotation réelle  $\theta$ . On en déduit ensuite la répartition entre moment de torsion libre et moment de torsion gêlée puis on détermine les contraintes qu'ils engendrent : contraintes de cisaillement pour le moment de torsion libre, contraintes de cisaillement et contraintes normales pour le moment de torsion gêlée. La figure 35 illustre la distribution de ces différentes contraintes pour une section typique en double té.

En pratique, pour les profils les plus couramment utilisés, on admet que la torsion gêlée est négligeable devant la torsion de

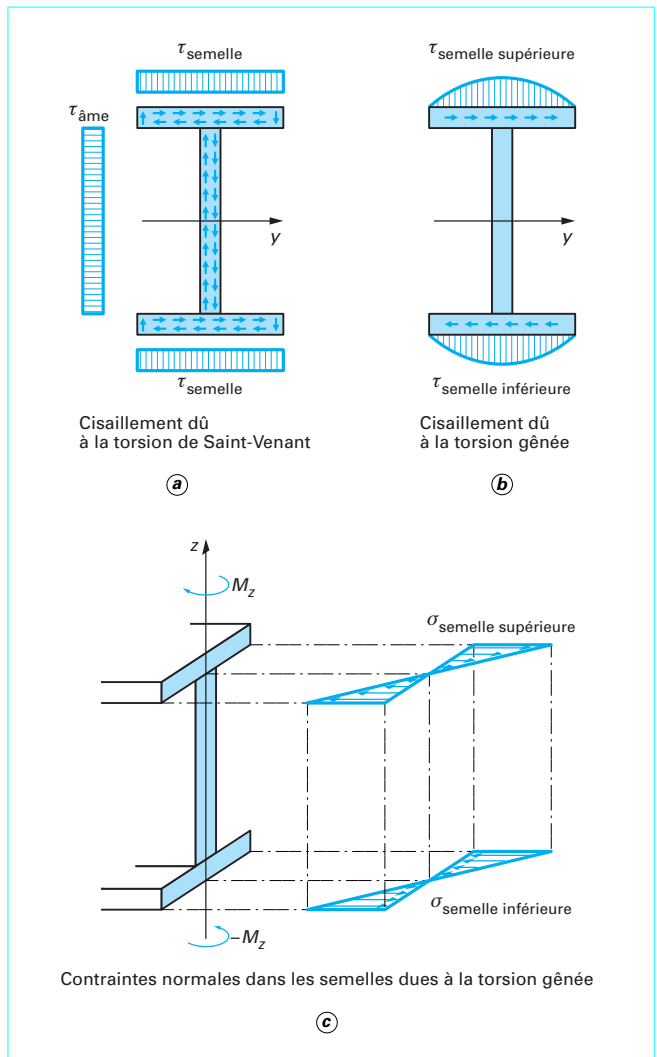


Figure 35 – Distribution de contraintes sous torsion mixte

Saint-Venant pour les sections fermées à parois minces. La torsion ne crée que des contraintes de cisaillement à évaluer par les relations (69) et (70).

Pour les poutres de sections ouvertes, la réalité est plus complexe avec une variation de la part de chaque phénomène le long de la poutre en fonction de sa portée et de ses conditions aux limites. Une approche conservative, assez couramment adoptée au niveau de la conception ou d'un pré-dimensionnement, consiste à :

- déterminer les différentes contraintes en supposant que tout le moment de torsion appliqué est repris séparément et intégralement par chaque phénomène seul ;
- à évaluer l'angle de torsion par la relation de Saint-Venant (cf. relation (63)).

Pour un prédimensionnement, les contraintes dues à la torsion sont à superposer aux contraintes induites par l'effort tranchant et le moment fléchissant s'ils existent.