BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

KIMOU.

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

3e Année Secondaire : Mathématiques

الجزء 5

سلسلة هبـــاج

KIMOU.

الرياضيـــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمـــاذج للبكالوريا

الجزء الخامس

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ـ رياضيات ـ علوم تجريبية

سلسلة هبـــاج

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكـــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتـــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربع محاور من البرنامج :

- **الأعداد المركبة**
- **التشابه المباشر**
- **المقاطع المستوية للسطوح**
- **الأعداد الأولية**

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل درس ، مجموعة تطبيقـــات للتصحيح الذاتـــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايـــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبـــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 0773 26 52 81

الأعداد المركبة

تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب من الشكل $z = x + i\,y$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

مثلا : $5 - 2i$ ؛ $-i$

ملاحظة : نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ C

إذا كان $z = x + i\,y$ عددا مركبا فإن x يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له بـ $Re(z)$ و y يسمى الجزء التخيلي و نرمز له $Im(z)$.

إذا كان $Im(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان $Re(z) = 0$ نقول أن z عدد تخيلي صرف أو تخيلي محض أو تخيلي بحت

يكون z عددا مركبا معدوما إذا و فقط إذا كان $Re(z) = Im(z) = 0$

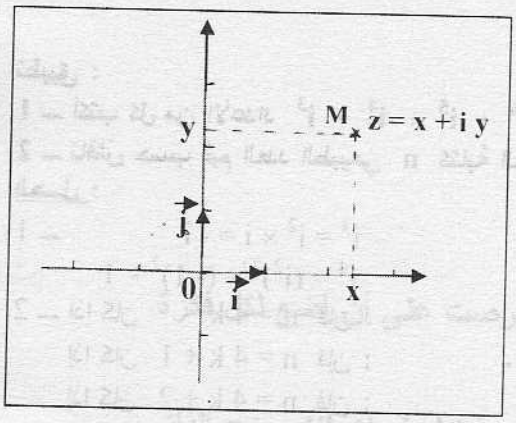
الكتابة $z = x + i\,y$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z

يكون z و z' عددان مركبان متساويان إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

التمثيل الهندسي

ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{OI} ; \vec{OJ})$

كل عدد مركب من الشكل $z = x + i\,y$ حيث $(x \in R \;;\; y \in R \;;\; i^2 = -1)$ له صورة في المستوي هي النقطة M ذات الإحداثيات $(x ; y)$



الشعاع $\vec{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو أيضا صورة للعدد المركب z و العكس صحيح حيث :

كل نقطة $M(x ; y)$ من المستوي هي لاحقة لعدد مركب $z = x + i\,y$

كل شعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ من المستوي هو لاحقة لعدد مركب $z = x + i\,y$

نتائج :

إذا كان z عدد حقيقي فإن صورته هي نقطة من محور الفواصل .

إذا كان z عدد تخيلي صرف فإن صورته هي نقطة من محور التراتيب

المستوي في هذه الحالة يسمى المستوي المركب

نشاط :

المستوي منسوب إلى معلم منعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

x و y عددان حقيقيان . لتكن (S) مجموعة النقط $M(x ; y)$ من المستوي حيث $z = x^2 + (1 + i)\,y - i$ $(i^2 = -1)$

عين المجموعة (S) في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ z عدد حقيقي 2 ــ z تخيلي صرف

الحـل :

لنكتب z على شكله الجبري :

$$z = x^2 + (1 + i)\,y - i = x^2 + y + i\,y - i = (x^2 + y) + (y - 1)\,i$$

1 ــ يكون z حقيقي إذا و فقط إذا كان $y - 1 = 0$ أي $y = 1$

إذن : في هذه الحالة (S) هو المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (موازي لمحور الفواصل)

2 ــ يكون z تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $x^2 + y = 0$ أي $y = -x^2$

إذن : في هذه الحالة (S) هو منحنى الدالة f المعرفة على R بـ $f(x) = -x^2$

مرافق عدد مركب :

تعريف : z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نسمي مرافق z العدد المركب $\bar{z}$ و المعرف بـ $\bar{z} = x - i\,y$

أمثلة : $\overline{1 + 3i} = 1 - 3i$ ؛ $\overline{-i} = i$ ؛ $\overline{-3} = \overline{-3 + 0i} = -3$

تفسير هندسي :

في المستوي المركب إذا كانت M صورة العدد المركب z فإن M' صورة العدد المركب $\bar{z}$ هي نظيرة النقطة M

بالنسبة إلى محور الفواصل .

عمليات على الأعداد المركبة :

z و z' عددان مركبان يكتبان على شكلهما الجبري على الترتيب $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

$$z + z' = (x + i\,y) + (x' + i\,y') = (x + x') + i(y + y') \qquad (*)$$

$$z \times z' = (x + i\,y)(x' + i\,y') = x\,x' + i\,x\,y' + i\,x'\,y + i^2\,y\,y' \qquad (**)$$

$$= x\,x' - y\,y' + i(x\,y' + x'\,y)$$

ملاحظة : $z \times \overline{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 - (i\,y)^2 = x^2 + y^2$

إذن : الجداء $z \times \overline{z}$ هو عدد حقيقي .

نتيجة هامة : لكتابة العدد $1/z$ (حيث $z \neq 0$) على شكله الجبري يكفي أن نحول مقامه إلى عدد حقيقي .

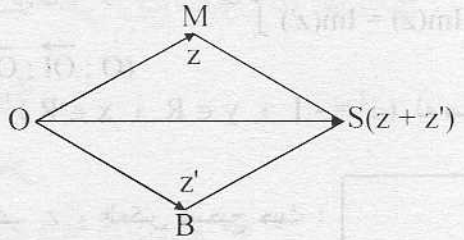
مثلا : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$

التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين

في المستوي المركب نعتبر النقطة M صورة العدد المركب z و النقطة B صورة العدد المركب z'

العدد $z + z'$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}$ حيث O هو مبدأ المعلم

إذن : النقطة S حيث الرباعي $OMSB$ متوازي أضلاع هي صورة العدد المركب $z + z'$ (الشعاع $\overrightarrow{OS}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OB}$)



تطبيق :

1 ــ أكتب كل من الأعداد i^3 ؛ i^4 ؛ i^5 ؛ i^6 ؛ i^7 ؛ i^8 على شكلها الجبري

2 ــ ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n كتابة العدد i^n على شكله الجبري

الحـل :

1 ــ $i^3 = i^2 \times i = -i$ ، $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i \times i^4 = i$ ، $i^6 = i \times i^5 = (i)^2 = -1$

$i^7 = i \times i^6 = -i$ ، $i^8 = (i^4)^2 = 1$

2 ــ إذا كان $n = 4k$ فإن : $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن : $i^n = i^{4k+1} = i \times i^{4k} = i$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن : $i^n = i^{4k+2} = i^2 \times i^{4k} = (-1) \times 1 = -1$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن : $i^n = i^{4k+3} = i^3 \times i^{4k} = i^3 = -i$

لاحقة شعاع كيفي (مرجح جملة)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

A و B نقطتان لاحقتهما على الترتيب z_A و z_B

العدد المركب $z_B - z_A$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$

نتيجة : إذا كان a و b عددان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$ فإن مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\}$ له اللاحقة

$$\frac{a\,z_A + b\,z_B}{a + b}$$

ملاحظة : يمكن لهذه النتيجة أن تعمم إلى n نقطة مختلفة

خواص مرافق عدد مركب :

ليكن z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

1 ــ $\overline{\overline{z}} = z$

2 ــ $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

3 ــ $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$

4 ــ $z \times \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

5 ــ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

6 ـ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z}'$

7 ـ $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ حيث $n \in N^*$

8 ـ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}'}$ حيث $z' \neq 0$

9 ـ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$

نشاط :

ليكن p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي $p(z) = z^3 + z^2 - 2$

1 ـ أثبت أن : $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$

2 ـ أحسب $p(1)$ ؛ $p(-1-i)$ ماذا تستنتج ؟

3 ـ إستنتج الجذر الآخر لكثير الحدود p

الحـل :

1 ـ $\overline{p(z)} = \overline{z^3 + z^2 - 2} = \overline{z}^3 + \overline{z}^2 - 2 = (\overline{z})^3 + (\overline{z})^2 - 2 = p(\overline{z})$

2 ـ $p(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned} p(-1-i) &= (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2 \\ &= (-1-i)^2[-1-i+1] - 2 \\ &= (1+2i-1)(-i) - 2 \\ &= 2i(-i) - 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نتيجة : الأعداد 1 و $(-1-i)$ هي جذور لكثير الحدود p

3 ـ حسب السؤال (1) فإن : $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$

إذن : $p(\overline{-1-i}) = \overline{p(-1-i)}$

أي : $p(-1+i) = \overline{0}$

منه : $p(-1+i) = 0$

إذن : الجذر الاخر لـ p هو $-1+i$

طويلة عدد مركب

تعريف : z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$

نسمي طويلة z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ $|z|$ و المعرف بـ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

أمثلة : $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

$|1 - i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$|3i| = \sqrt{0 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3$

حالات خاصة : إذا كان $z = 0$ فإن $|z| = 0$

إذا كان z عدد حقيقي فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لـ z

إذا كان z عدد تخيلي صرف فإن طويلة z هي القيمة المطلقة لجزؤه التخيلي

خواص : z و z' عددين مركبين . لدينا الخواص التالية :

1 ـ $|\overline{z}| = |z|$

2 ـ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

3 ـ $|-z| = |z|$

4 ـ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$

5 ـ $|z^n| = |z|^n$ مع $n \in N^*$

حذر ! $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

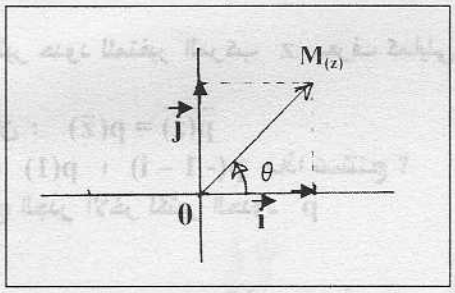
عمدة عدد مركب غير معدوم

تعريف : z عدد مركب غير معدوم يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{OI} ; \vec{OJ})$ نعتبر النقطة $M(x ; y)$ ذات اللاحقة z .

كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{OI} ; \vec{OM})$ يسمى عمدة العدد المركب z و نرمز له بـ $Arg(z)$

نتيجة : إذا كان θ هو عمدة للعدد المركب z فإن كل عدد حقيقي من الشكل $\theta + 2\pi k$ حيث $k \in Z$ هو أيضا عمدة للعدد المركب z



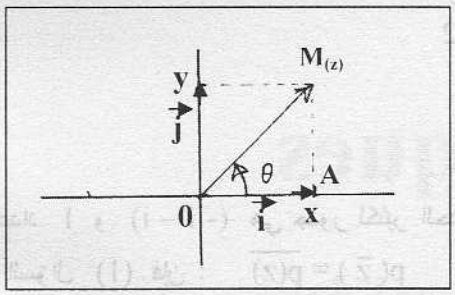
مثلا : لنمثل العدد $z = 1 + i$

لاحظ أن $(\vec{OI} ; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4}$

إذن : $Arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

البحث عن عمدة عدد مركب

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس $(O ; \vec{OI} ; \vec{OJ})$ نعتبر العدد المركب $z = x + iy$ لاحقة للنقطة M في المثلث القائم OAM لدينا :



$$\begin{cases} OM^2 = OA^2 + MA^2 \\ \cos\theta = \frac{x}{OM} \\ \sin\theta = \frac{y}{OM} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} OM^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \frac{x}{OM} \\ \sin\theta = \frac{y}{OM} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

لكن $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$

نتيجة : عمدة العدد المركب z حيث $z = x + iy$ هي العدد الحقيقي θ الذي يحقق : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$

أمثلة : عين عمدة العدد المركب $z = 1 - \sqrt{3}\, i$

الحـل : ليكن $Arg(z) = \theta$

إذن : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{|z|} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+3}} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \end{cases}$

أي $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

منه : $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ حيث $k \in Z$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

z و z' عددان مركبان غير معدومان .

1 – $\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$

2 – $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$

3 – $\text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z)$ حيث $n \in N^*$

نتيجة : الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث طويلته $|z| = \ell$ و عمدته $\text{Arg}(z) = \theta$

فإن كتابة z من الشكل $z = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z

مثال : $z = 1 - i$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ إذن : $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{-\pi}{4}$

إذن : الشكل المثلثي لـ z هو $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

تطبيق :

أكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي (باستعمال خواص الطويلة و العمدة)

1 – $z = 1 + i$ **3 –** $z = (1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})$

2 – $z = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ **4 –** $z = \frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}$

الحل :

1 – $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ إذن : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{\pi}{4}$

نتيجة : $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

2 – $|\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ منه $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{3}$

نتيجة : $\sqrt{2} - i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

3 – $|(1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})| = |1+i| \times |\sqrt{2} - i\sqrt{6}| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

$\text{Arg}((1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})) = \text{Arg}(1+i) + \text{Arg}(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{12}$

نتيجة : $(1+i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

4 – $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}\right| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{2} - i\sqrt{6}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\text{Arg}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}\right) = \text{Arg}(1+i) - \text{Arg}(\sqrt{2} - i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$

نتيجة : $\frac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

تعريف : العدد المركب الذي طويلته 1 و عمدته θ حيث $\theta \in R$ يكتب على الشكل الأسي كمايلي $e^{i\theta}$ حيث $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ هذا الترميز يسمى ترميز أولر

تعميم : إذا كان z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = \ell$ و $Arg(z) = \theta$ فإن z يكتب على الشكل الأسي من الشكل $z = \ell e^{i\theta}$

ملاحظة : الشكل الأسي لعدد مركب يحتفظ بخواص الدالة الأسية كمايلي :

$$e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\theta)} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}$$

دستور موافر

ليكن z عدد مركب حيث $|z| = \ell$ و $Arg(z) = \theta$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$z^n = (\ell e^{i\theta})^n = \ell^n \times e^{in\theta} = \ell^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

إذن : $[\ell(\cos\theta + i\sin\theta]^n = \ell^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$

نشاط :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad 8e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الحـل :

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + i\sqrt{3}$$

$$8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 8\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$$

$$5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 5[0 + i] = 5i$$

نشاط عكسي :

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسي :

$$(1-i)^8 \quad ; \quad -3-3i \quad ; \quad -7i$$

الحـل :

$$|-7i| = 7$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{7} = 0 \\ \sin\theta = \frac{-7}{7} = -1 \end{cases}$$

إذن : $\theta = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{2}$

نتيجة : $-7i = 7\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 7e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$$|-3-3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

إذن : $\theta = 5\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = \frac{5\pi}{4}$

نتيجة : $-3-3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = 3\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ إذن : $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و ليكن $\theta = -\frac{\pi}{4}$

نتيجة : $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$

منه $(1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}\right]^8 = 16\, e^{-2\pi i}$

البحث عن الجذران التربيعيان لعدد مركب على شكلهما الجبري :

ليكن z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i y$

نريد تعيين العدد المركب w على شكله الجبري $w = \alpha + i\beta$ حيث $w^2 = z$ لذلك نتبع الخطوات التالية :

1 ــ $w^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2 i \alpha\beta$

2 ــ $|w^2| = |w|^2 = \alpha^2 + \beta^2$

3 ــ إذا كان $w^2 = z$ فإن
$$\left.\begin{aligned} |w^2| &= |z| \\ Re(w^2) &= Re(z) \\ Im(w^2) &= Im(z) \end{aligned}\right\}$$
أي
$$\left.\begin{aligned} &(1) \ldots\ldots\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &(2) \ldots\ldots\ \alpha^2 - \beta^2 = x \\ &(3) \ldots\ldots\ 2\alpha\beta = y \end{aligned}\right\}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2\alpha^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

منه : $\alpha^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

إذن : يكفي أن يكون $\alpha = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$

نعوض α في المساواة (3) : $2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}\,\beta = y$

إذن : $\beta = \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}}$ أي $\beta = \frac{y}{2\alpha}$ مع $\alpha \neq 0$

نتيجة : أحد الجذور التربيعية للعدد المركب $z = x + i y$ هو العدد $w = \sqrt{\frac{x + |z|}{2}} + i\frac{y}{2\sqrt{\frac{x + |z|}{2}}}$

حيث $x + \sqrt{|z|} \neq 0$

ملاحظة : للحصول على الجذر الاخر يكفي أن نأخذ $(-w)$

مثال : عين الجذر التربيعي للعدد $-8 + 6i$

الحـل : ليكن $(\alpha + i\beta)^2 = -8 + 6i$

إذن : $\alpha = \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{2}} = \sqrt{\frac{-8 + 10}{2}} = 1$

منه : $\beta = \frac{6}{2\alpha} = \frac{6}{2} = 3$

نتيجة : $\alpha + i\beta = 1 + 3i$ أي $(1 + 3i)^2 = -8 + 6i$

و الجذر الآخر : $-(1 + 3i) = -1 - 3i$

البحث عن حلول معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول مركب z

لتكن المعادلة $a z^2 + b z + c = 0$ ....(1) ذات المجهول المركب z حيث a ، b ، c أعداد مركبة معلومة حيث $a \neq 0$

المعادلة (1) دائما تقبل حلولا في مجموعة الأعداد المركبة C كمايلي :

1 ــ نحسب المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

2 ــ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا $z_0 = \frac{-b}{2a}$

3 ــ إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين z_1 و z_2 حيث $z_1 = \frac{-b-w}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b+w}{2a}$

و w هو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ

مثال : حل في C المعادلة : $z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0$ ..... (1)

الحـــل :

$$\Delta = (3-2i)^2 - 4(1)(5-5i)$$
$$= 9 - 12i - 4 - 20 + 20i$$
$$= -15 + 8i$$
$$= (\alpha + i\beta)^2$$

لنبحث عن α و β كمايلي :

$$|\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$$

منه : $\left.\begin{array}{l} \alpha = \sqrt{\frac{-15+17}{2}} \\ \beta = \frac{8}{2\alpha} \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 8/2 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \end{array}\right\}$

نتيجة : أحد الجذور التربيعية للعدد المركب Δ هو : $1 + 4i$

منه : حلول المعادلة (1) هي :

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \frac{-(3-2i)-(1+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2-i \\ z_2 = \frac{-(3-2i)+(1+4i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i \end{array}\right\}$$

البحث عن الشكل المركب لتحويل نقطي مألوف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

$N(x ; y)$ و $N'(x' ; y')$ نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و z'

1 ــ الانسحاب : ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي .

T هو الانسحاب للمستوي ذو الشعاع $\vec{u}$ يحول النقطة N إلى N'

إذن : $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$

منه : $z' - z = \alpha + i\beta$

أي : $z' = z + \alpha + i\beta$ و هي العبارة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$

خواص : الإنسحاب هو تحويل تقابلي للمستوي و تحويله العكسي هو الإنسحاب ذو الشعاع $-\vec{u}$ الذي لاحقته $-\alpha - i\beta$ إذن عبارته $z' = z - \alpha - i\beta$

2ــ التحاكي : لتكن $W(\alpha ; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و k عدد حقيقي غير معدوم

h هو التحاكي للمستوي مركزه W و نسبته k و يحول N إلى N'

إذن : $\overrightarrow{WN'} = k\,\overrightarrow{WN}$

منه : $z' - (\alpha + i\beta) = k[z - (\alpha + i\beta)]$

منه : $z' = kz + (\alpha + i\beta)(1-k)$ هي عبارة التحاكي h

3ــ الدوران : لتكن $w(\alpha ; \beta)$ نقطة ثابتة من المستوي و θ عدد حقيقي

R هو الدوران للمستوي مركزه W و زاويته θ و يحول النقطة N إلى N'

إذن : $\left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{WN} ; \overrightarrow{WN'}) = \theta \\ \|\overrightarrow{WN'}\| = \|\overrightarrow{WN}\| \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Arg}(z' - (\alpha + i\beta)) - \mathrm{Arg}(z - (\alpha + i\beta)) = \theta \\ z' - (\alpha + i\beta)| = |z - (\alpha + i\beta)| \end{array}\right\}$

إذن : $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Arg}\left(\frac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)}\right) = \theta \\ \left|\frac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)}\right| = 1 \end{array}\right\}$

إذن : $\dfrac{Z' - (\alpha + i\beta)}{Z - (\alpha + i\beta)} = \cos\theta + i\sin\theta$

أي : $z' - (\alpha + i\beta) = (\cos\theta + i\sin\theta)[z - (\alpha + i\beta)]$

إذن : $z' = (\cos\theta + i\sin\theta)\, z + (\alpha + i\beta)[1 - (\cos\theta + i\sin\theta)]$ هي عبارة الدوران R

دراسة الحالة العامة :

ليكن f التحويل النقطي للمستوي و الذي يحول النقطة N ذات اللاحقة z إلى النقطة 'N ذات اللاحقة 'z حيث $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$. نميز الحالات التالية :

1 ــ إذا كان $a = 1$ فإن f هو الإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة b

2 ــ إذا كان $a \in R^* - \{1\}$ فإن f هو التحاكي الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ و النسبة a

3 ــ إذا كان $a \in C - R$ حيث $|a| = 1$ فإن f هو الدوران الذي مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ و الزاوية θ حيث $\theta = \mathrm{Arg}(a)$

مثال (1) : المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{OI} ; \vec{OJ})$

t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

1 ــ عين العبارة المركبة للإنسحاب t

2 ــ A نقطة لاحقتها $-3 - i$. عين لاحقة النقطة 'A صورة A بالإنسحاب t

الحـل :

1 ــ لتكن M نقطة لاحقتها z و 'M نقطة لاحقتها 'z

'M صورة M بـ t إذا و فقط إذا كان $z' = z + (-2 + i)$ و هي عبارة الإنسحاب t

2 ــ من أجل $z = 3 - i$ فإن : $z' = 3 - i - 2 + i = 1$

إذن : لاحقة النقطة 'A هي 1 أي $A'(1 ; 0)$

مثال (2) : h تحاكي للمستوي مركزه A ذات اللاحقة $-1 + 2i$ و نسبته 3

عين العبارة المركبة لـ h ثم لاحقة صورة النقطة B حيث B هي النقطة التي لاحقتها $-3 - 2i$

الحـل : لتكن $z' = az + b$ عبارة التحاكي .

النسبة هي 3 إذن : $a = 3$

لاحقة المركز هي $-1 + 2i$ إذن : $\dfrac{b}{1-3} = -1 + 2i$ أي $b = (1-3)(-1 + 2i)$

منه : $b = 2 - 4i$

إذن : عبارة التحاكي h هي : $z' = 3z + 2 - 4i$

من أجل $z = -3 - 2i$ فإن $z' = 3(-3 - 2i) + 2 - 4i$

أي : $z' = -7 - 10i$ و هي لاحقة صورة B

مثال (3) : عين العبارة المركبة للدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

الحـل : لتكن $z' = az + b$ عبارة الدوران

زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{3}$ إذن : $a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

منه : $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لاحقة مركز الدوران هي $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ إذن : $\dfrac{b}{1-a} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

أي : $\dfrac{b}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

منه : $b = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

أي : $b = -\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)$

أي $b = -1$

نتيجة : عبارة الدوران هي : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z - 1$

حل معادلات من الدرجة الرابعة (مضاعفة التربيع)

لحل المعادلة $a z^4 + b z^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ في C نضع $z^2 = t$ ثم نحل المعادلة $a t^2 + b t + c = 0$ ذات المجهول المركب t و لتكن t_1 و t_2 هذه الحلول (يمكن أن يكون $t_1 = t_2$)

إذن : حلول المعادلة $a z^4 + b z^2 + c = 0$ هي الجذور التربيعية للعددين t_1 و t_2

حل معادلات من الدرجة الثالثة :

لحل المعادلة $a z^3 + b z^2 + c z + d = 0$ $(a \neq 0)$ في C نبحث عن أحد حلولها الخاصة (حل حقيقي ، حل تخيلي صرف أو حلان مترافقان) ثم بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على الحلول الأخرى .

الجذور النونية لعدد مركب على شكله المثلثي

ليكن z عدد مركب على شكله المثلثي $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $R > 0$

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1

كل عدد مركب w يحقق $w^n = z$ هو جذر نوني للعدد z

للبحث عن w على شكله المثلثي نضع $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

إذن : $w^n = z$ يكافئ $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\left.\begin{array}{l} r^n = R \\ n\alpha = \theta + 2\pi k \text{ حيث } k \in Z \end{array}\right\} \text{يكافئ}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt[n]{R} \\ \alpha = \frac{1}{n}\theta + \frac{2\pi}{n} k \end{array}\right\} \text{يكافئ}$$

ملاحظة : كل عدد مركب له n جذر نوني مختلف $(n > 1)$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

في كل تمارين هذا المحور نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$

التمرين ـ 1

عين Re(z) و Im(z) ثم |z| في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ $z = 3 + 2i$ 4 ـ $z = i - 3\sqrt{2}$

2 ـ $z = -1 + 3i$ 5 ـ $z = \sqrt{5} - \sqrt{7}$

3 ـ $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 6 ـ $z = -i\sqrt{3}$

الحل ـ 1

z	Re(z)	Im(z)	|z'|
$3 + 2i$	3	2	$\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$-1 + 3i$	-1	3	$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\left\|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (حقيقي)
$i - 3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	1	$\sqrt{9 \times 2 + 1} = \sqrt{19}$
$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	0	$\|\sqrt{5} - \sqrt{7}\| = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ (حقيقي)
$-i\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	$\|-\sqrt{3}\| = \sqrt{3}$ (تخيلي)

التمرين ـ 2

z عدد مركب حيث $z = (x^2 + x) + i(x^2 + y - 1)$

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما .

الحل ـ 2

z معدوم إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x \in \{0 ; -1\} \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$

من أجل $x = 0$: $y - 1 = 0$ إذن : $y = 1$

من أجل $x = -1$: $1 + y - 1 = 0$ إذن : $y = 0$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(0 ; 1) ; (-1 ; 0)\}$

التمرين ـ 3

1 ـ عين إحداثيات النقطة D ذات اللاحقة $\sqrt{3} + 3i$

2 ـ عين لواحق النقط A ؛ B ؛ C حيث $A(\sqrt{3} ; 1)$ ؛ $B(0 ; 2)$ ؛ $C(-\sqrt{3} ; -1)$

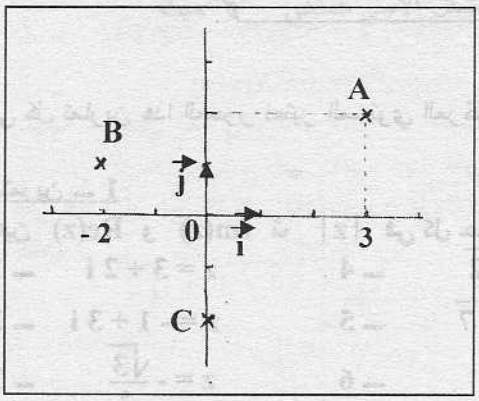
الحل ـ 3

1 ـ إحداثيات النقطة D هما $(\sqrt{3} ; 3)$

2 ـ لاحقة النقطة A هي العدد المركب $\sqrt{3} + i$

لاحقة النقطة B هي العدد المركب $2i$

لاحقة النقطة C هي العدد المركب $-\sqrt{3} - i$



التمرين ـ 4

إليك الشكل المقابل .

ليكن z عدد مركب نضع $z' = 3 + iz$

أكتب العدد z' على شكله الجبري في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ z هو لاحقة النقطة A

2 ـ z هو لاحقة النقطة B

3 ـ z هو لاحقة النقطة C

الحـل ـ 4

1 ـ z هو لاحقة النقطة A إذن : $z = 3 + 2i$

منه : $z' = 3 + i(3 + 2i)$

أي : $z' = 3 + 3i - 2$

أي $z' = 1 + 3i$

2 ـ z هو لاحقة النقطة B إذن : $z = -2 + i$

منه : $z' = 3 + i(-2 + i)$

أي $z' = 3 - 2i - 1$

أي $z' = 2 - 2i$

3 ـ z هو لاحقة النقطة C إذن : $z = -2i$

منه $z' = 3 + i(-2i)$

أي $z' = 3 + 2$

أي $z' = 5$

التمرين ـ 5

A نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $a = -1 + 2i$

عين العدد المركب z حيث تكون صورته النقطة M نظيرة A بالنسبة إلى :

أ) مبدأ المعلم **ح) حامل محور التراتيب**

ب) حامل محور الفواصل **د) المنصف الأول .**

الحـل ـ 5

$a = -1 + 2i$ لاحقة النقطة A إذن : $A(-1 ; 2)$

أ) M نظيرة A بالنسبة إلى مبدأ المعلم إذن $M(1 ; -2)$ منه $z = 1 - 2i$

ب) M نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن $M(-1 ; -2)$ منه $z = -1 - 2i$

ج) M نظيرة A بالنسبة إلى محور التراتيب إذن $M(1 ; 2)$ منه $z = 1 + 2i$

د) M نظيرة A بالنسبة إلى المنصف الأول إذن $M(2 ; -1)$ منه $z = 2 - i$

التمرين ـ 6

أعط مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2 + 4i \quad ; \quad 3 - i \quad ; \quad i\sqrt{2} - 3 \quad ; \quad -\frac{5}{2}i$$

الحـل ـ 6

$$\overline{2 + 4i} = 2 - 4i \qquad \overline{i\sqrt{2} - 3} = -i\sqrt{3} - 3$$

$$\overline{3 - i} = 3 + i \qquad \overline{-\frac{5}{2}i} = \frac{5}{2}i$$

التمرين ـ 7

z عدد مركب حيث $z = 3 + 4i$. أحسب $z \times \overline{z}$ ثم أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{i}{z}$

الحـل ـ 7

$$z \times \overline{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{i}{z} = \frac{i}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{i\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{i(3 - 4i)}{25} = \frac{3i + 4}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

التمرين ـ 8

z عد مركب حيث $z = 2 + i$

أكتب كل من الأعداد التالية عى شكلها الجبري :

$$\frac{1}{z} + \frac{i}{\bar{z}} \quad ; \quad \frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\bar{z}} \quad ; \quad \frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\bar{z}}$$

الحـل ـ 8

لدينا :

$$z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 4 + 1 = 5$$

$$\frac{1}{z} + \frac{i}{\bar{z}} = \frac{\bar{z} + iz}{z\bar{z}} = \frac{2 - i + i(2+i)}{5} = \frac{2 - i + 2i - 1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\frac{1+2i}{z} - \frac{3-i}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}(1+2i) - z(3-i)}{z\bar{z}}$$

$$= \frac{(2-i)(1+2i) - (2+i)(3-i)}{5}$$

$$= \frac{2 + 4i - i + 2 - 6 + 2i - 3i - 1}{5}$$

$$= \frac{-3}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\frac{1+3i}{z} \times \frac{3-2i}{\bar{z}} = \frac{(1+3i)(3-2i)}{z\bar{z}} = \frac{3 - 2i + 9i + 6}{5} = \frac{9}{5} + \frac{7}{5}i$$

التمرين ـ 9

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{1}{i} \quad ; \quad \frac{1}{1-i} \quad ; \quad \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1}{3i-5}$$

الحـل ـ 9

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{3+i\sqrt{2}} = \frac{1}{3+i\sqrt{2}} \times \frac{3-i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}} = \frac{3-i\sqrt{2}}{9+2} = \frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}i$$

$$\frac{1}{3i-5} = \frac{1}{-5+3i} \times \frac{-5-3i}{-5-3i} = \frac{-5-3i}{25+9} = \frac{-5}{34} - \frac{3}{34}i$$

التمرين ـ 10

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$$\frac{4-6i}{3+2i} \quad ; \quad \frac{5+15i}{1+2i} \quad ; \quad \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1+i}{1-i}$$

الحـل ـ 10

$$\frac{4-6i}{3+2i} = \frac{4-6i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{12 - 8i - 18i - 12}{9+4} = \frac{-26}{13}i = -2i$$

$$\frac{5+15i}{1+2i} = \frac{5+15i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{5 - 10i + 15i + 30}{1+4} = \frac{35}{5} + \frac{5}{5}i = 7 + i$$

$$\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} \times \frac{3+i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{2}} = \frac{3 + i\sqrt{2} + 3i - \sqrt{2}}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}}{11} + i\left(\frac{3+\sqrt{2}}{11}\right)$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1 + 2i - 1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

التمرين ـ 11

أكتب مرافق كل من الأعداد المركبة التالية على شكله الجبري :

$(1 - i)(2 + i)$ ؛ $(1 + 2i)^3$ ؛ $\frac{3 - i}{1 + i}$

الحـل ــ 11

يمكن حل هذا التمرين بطريقتين مختلفين كمايلي :

أولا : إما نكتب هذه الأعداد على شكلها الجبري ثم نبحث عن مرافقها .

ثانيا : أو نستعمل خواص المرافق و نحسب في نفس الوقت .

مثلا : لنبحث عن مرافق العدد $(1 - i)(2 + i)$

الطريقة الأولى : $(1 - i)(2 + i) = 2 + i - 2i + 1 = 3 - i$

إذن : $\overline{(1 - i)(2 + i)} = \overline{3 - i} = 3 + i$

الطريقة الثانية : $\overline{(1 - i)(2 + i)} = \overline{(1 - i)} \times \overline{(2 + i)} = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$

إذن : نختار الطريقة الثانية لحل باقي التمرين كمايلي :

$$\begin{aligned}\overline{(1 + 2i)^3} &= (\overline{(1 + 2i)})^3 \\ &= (1 - 2i)^3 \\ &= (1 - 2i)^2 \times (1 - 2i) \\ &= (1 - 4i - 4)(1 - 2i) \\ &= (-3 - 4i)(1 - 2i) \\ &= -3 + 6i - 4i - 8 \\ &= -11 + 2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{3 - i}{1 + i}\right)} &= \frac{\overline{3 - i}}{\overline{1 + i}} \\ &= \frac{3 + i}{1 - i} \\ &= \frac{1 + i}{1 + i} \times \frac{3 + i}{1 - i} \\ &= \frac{3 + 3i + i - 1}{1 + 1} \\ &= \frac{2 + 4i}{2} \\ &= 1 + 2i\end{aligned}$$

التمرين ــ 12

أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي θ فإن :

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

الحـل ــ 12

ليكن θ عدد حقيقي .

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^2}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \quad \text{لأن } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad \text{حسب موافر.}\end{aligned}$$

التمرين ــ 13

ليكن $z_1 = \frac{3 - i}{2 + 5i}$ و $z_2 = \frac{3 + i}{2 - 5i}$

1 ــ برر دون حساب أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و أن $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف

2 ــ أحسب $z_1 + z_2$ ثم $z_1 - z_2$ ثم إستنتج الشكل الجبري لـ z_1

الحـل ــ 13

1 ــ يكون عدد مركب z حقيقي إذا و فقط إذا كان $z = \overline{z}$

يكون عدد مركب z تخيلي إذا و فقط إذا كان $z = -\overline{z}$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3-i}{2+5i}\right)} + \overline{\left(\frac{3+i}{2-5i}\right)} = \frac{3+i}{2-5i} + \frac{3-i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = -\left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}\right) = -(z_1 - z_2)$$

نتيجة : $\overline{z_1 - z_2} = -(z_1 - z_2)$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

2 ـ

$$z_1 + z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 + 6 + 15i + 2i - 5}{4+25}$$

$$= \frac{2}{29}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 - 6 - 15i - 2i + 5}{4+25}$$

$$= \frac{-34}{29} i$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 = \frac{2}{29} \\ z_1 - z_2 = \frac{-34}{29} i \end{array}\right\}$ منه بالجمع $2z_1 = \frac{2}{29} - \frac{34}{29} i$

إذن : $z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i$

التمرين ـ 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 ـ $(1-i)z = 3+i$

2 ـ $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$

3 ـ $(3-4i)z^2 = iz$

4 ـ $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

الحـل ـ 14

1 ـ $(1-i)z = 3+i$ إذن : $z = \frac{3+i}{1-i}$

أي $z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

أي $z = \frac{3+3i+i-1}{1+1}$

أي $z = 1+2i$

2 ـ $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$ إذن : $z[3-(1+i)] = 2 - i - 1 - 2i$

أي $(2-i)z = 1 - 3i$

أي $z = \frac{1-3i}{2-i}$

لنستعمل هذه الخواص في السؤال كمايلي :

$$z_1 + z_2 = \frac{3-i}{2+5i} + \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3-i}{2+5i}\right)} + \overline{\left(\frac{3+i}{2-5i}\right)} = \frac{3+i}{2-5i} + \frac{3-i}{2+5i}$$

نتيجة : $z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}$ إذن : $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي .

$$z_1 - z_2 = \frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \frac{3+i}{2-5i} - \frac{3-i}{2+5i} = -\left(\frac{3-i}{2+5i} - \frac{3+i}{2-5i}\right) = -(z_1 - z_2)$$

نتيجة : $\overline{z_1 - z_2} = -(z_1 - z_2)$ إذن : $z_1 - z_2$ تخيلي صرف .

2 ـ

$$z_1 + z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) + (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 + 6 + 15i + 2i - 5}{4+25}$$

$$= \frac{2}{29}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{(3-i)(2-5i) - (3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)}$$

$$= \frac{6 - 15i - 2i - 5 - 6 - 15i - 2i + 5}{4+25}$$

$$= \frac{-34}{29} i$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 = \frac{2}{29} \\ z_1 - z_2 = \frac{-34}{29} i \end{array}\right\}$ منه بالجمع $2z_1 = \frac{2}{29} - \frac{34}{29} i$

إذن : $z_1 = \frac{1}{29} - \frac{17}{29} i$

التمرين ـ 14

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 ـ $(1-i)z = 3+i$

2 ـ $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$

3 ـ $(3-4i)z^2 = iz$

4 ـ $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

الحل ـ 14

1 ـ $(1-i)z = 3+i$ إذن : $z = \frac{3+i}{1-i}$

أي $z = \frac{3+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$

أي $z = \frac{3+3i+i-1}{1+1}$

أي $z = 1 + 2i$

2 ـ $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$ إذن : $z[3-(1+i)] = 2 - i - 1 - 2i$

أي $(2-i)z = 1 - 3i$

أي $z = \frac{1-3i}{2-i}$

منه $z = \frac{1-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$

أي $z = \frac{2+i-6i+3}{4+1}$

أي $z = 1 - i$

3 ـ $(3-4i)z^2 = iz$ إذن : $(3-4i)z^2 - iz = 0$

منه $z[(3-4i)z - i] = 0$

أي $\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \text{أو} \\ (3-4i)z - i = 0 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{i}{3-4i} \end{array}\right\}$

منه $\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{3i-4}{9+16} \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ \text{أو} \\ z = \frac{-4}{25} + \frac{3}{25}i \end{array}\right\}$

4 ـ $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ تكافئ $\left.\begin{array}{l} z-1 \neq 0 \\ 2i(z-1) = z+1 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ 2iz - 2i - z - 1 = 0 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ z(2i-1) = 1+2i \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{1+2i}{2i-1} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{-1-2i-2i+4}{1+4} \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z \neq 1 \\ z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \end{array}\right\}$

تكافئ $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

التمرين ـ 15

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $2\overline{z} = -1 + i$

الحـل ـ 15

$2\overline{z} = -1 + i$ تكافئ $\overline{z} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$

منه $z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} i$

التمرين ــ 16

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 ــ $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$

2 ــ $\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i$

الحل ــ 16

1 ــ $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$ تكافئ $\begin{cases} 2z + 1 - i = 0 \\ \text{أو} \\ i\bar{z} + i - 2 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1 + i}{2} \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{2 - i}{i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{2 - i}{i} \times \frac{-i}{-i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = \frac{-2i - 1}{1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ \bar{z} = -1 - 2i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i \\ \text{أو} \\ z = -1 + 2i \end{cases}$

2 ــ $\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i$ تكافئ $\begin{cases} \bar{z} + 1 \neq 0 \\ i(\bar{z} + 1) = \bar{z} - 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z}(i - 1) = -1 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{-1 - i}{i - 1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{-1 - i}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \bar{z} \neq -1 \\ \bar{z} = i \end{cases}$

تكافئ $z = -i$

التمرين ــ 17

أكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق كل من الأعداد المركبة التالية :

$2 + 3iz$ ؛ $(2 + iz)(1 + 4z)$ ؛ $\frac{2 + iz}{z + 2}$ ؛ $z^3 - iz^2 + 3z - 3i$

الحـل ـ 17

$$\overline{2+3iz} = 2-3i\overline{z}$$

$$\overline{(2+iz)(1+4z)} = (2-i\overline{z})(1+4\overline{z})$$

$$\overline{\left(\frac{2+iz}{z+2}\right)} = \frac{2-i\overline{z}}{\overline{z}+2}$$

$$\overline{z^3 - iz^2 + 3z - 3i} = (\overline{z})^3 + i(\overline{z})^2 + 3\overline{z} + 3i$$

التمرين ـ 18

M نقطة من المستوي المركب لاحقتها العدد المركب z
عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون العدد $z+\frac{1}{z}$ حقيقيا .

الحـل ـ 18

ليكن $z = x + iy$

$z+\frac{1}{z}$ حقيقي يكافئ $\begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{z^2+1}{z} \in R \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{(x+iy)^2+1}{x+iy} \in R \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{(x^2-y^2+1)+2xyi}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{x(x^2-y^2+1)-y(x^2-y^2+1)i+2x^2yi+2xy^2}{x^2+y^2} \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ \frac{x^3-xy^2+x+2xy^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2y-x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}i \text{ حقيقي} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ 2x^2y-x^2y+y^3-y=0 \text{ (الجزء التخيلي معدوم)} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ x^2y+y^3-y=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ y(x^2+y^2-1)=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x\,;y) \neq (0\,;0) \\ y=0 \text{ أو } x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

إذن : مجموعة النقط M المطلوبة هي إتحاد المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) و نقط الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-1=0$ (مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها 1) باستثناء المبدأ ذو الإحداثيات $(0\,;0)$ لأن $(x\,;y) \neq (0\,;0)$

التمرين ـ 19

A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $-2+i$ ؛ $-1+4i$ ؛ $3+2i$ و $2-i$
برهن أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع

الحـل ـ 19

يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

إذن : يكفي أن نثبت أن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويتين .

لاحقة $\overrightarrow{AB}$: $(-1+4i)-(-2+i) = -1+4i+2-i = 1+3i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$: $(3+2i)-(2-i) = 3+2i-2+i = 1+3i$

نتيجة : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ لهما نفس اللاحقة إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

منه : ABCD متوازي أضلاع

التمرين ــ 20

z_A ؛ z_B ؛ z_C هي لواحق النقط $A(\sqrt{3}\,;1)$ ؛ $B(-\sqrt{3}\,;-1)$ ؛ $C(0\,;2)$ على الترتيب . عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

الحـل ــ 20

ABCD متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$

يكافئ $z_D = z_C - z_B + z_A$

يكافئ $z_D = 0 + 2i + \sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i$

يكافئ $z_D = 2\sqrt{3} + 4i$

التمرين ــ 21

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $3+2i$ ؛ $-1+3i$ ؛ $-2-2i$

1 ــ عين لاحقة النقطة I منصف القطعة [AB]

2 ــ عين لاحقة المرجح G للجملة $\{(A\,;2)\,;(B\,;-3)\,;(C\,;5)\}$

الحـل ــ 21

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C لواحق النقط A ؛ B ؛ C على الترتيب

1 ــ لاحقة منتصف [AB] هي $\dfrac{z_A + z_B}{2}$ أي $\dfrac{3+2i-1+3i}{2}$

منه : لاحقة النقطة I هي $1 + \dfrac{5}{2}i$

2 ــ لاحقة المرجح G هي : $\dfrac{2z_A - 3z_B + 5z_C}{2-3+5}$

إذن لاحقة G هي : $z_G = \dfrac{2(3+2i) - 3(-1+3i) + 5(-2-2i)}{2-3+5}$

أي $z_G = \dfrac{6+4i+3-9i-10-10i}{4}$

منه : $z_G = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{15}{4}i$

التمرين ــ 22

A ؛ B ؛ C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2+i$ ؛ $2-i$ ؛ i

عين لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD

الحـل ــ 22

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب

لاحقة مركز ثقل المثلث DCB هي $\dfrac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

إذن : تكون A مركز ثقل المثلث DCB إذا وفقط إذا كان $z_A = \dfrac{1}{3}(z_D + z_C + z_B)$

أي : $3z_A = z_D + z_C + z_B$

أي : $z_D = 3z_A - z_C - z_B$

منه : $z_D = 3(2+i) - (i) - (2-i)$

منه : $z_D = 4 + 3i$

التمرين ــ 23

من أجل كل عدد مركب z نضع $f(z) = z^2 - z$ حيث $z = x + iy$ (مع x و y عددان حقيقيان)

برهن أن $\begin{cases} Re(f(z)) = x^2 - y^2 - x \\ Im(f(z)) = y(2x-1) \end{cases}$

الحـــل ــ 23

$$f(z) = z^2 - z = (x + i\,y)^2 - (x + i\,y) = (x^2 - y^2 - x) + i(2\,x\,y - y)$$

إذن :
$$\begin{cases} Re(f(z)) = x^2 - y^2 - x \\ Im(f(z)) = 2\,x\,y - y = y(2\,x - 1) \end{cases}$$

التمرين ــ 24

z_A ؛ z_B ؛ z_C هي على الترتيب لواحق النقط $A(\sqrt{3}\,;1)$ ؛ $B(-\sqrt{3}\,;-1)$ ؛ $C(2\,;0)$

1 ــ أحسب $|z_A|$ ؛ $|z_B|$ ؛ $|z_C|$ ماذا تستنتج ؟

الحـــل ــ 24

1 ــ $|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$ ؛ $|z_B| = \sqrt{3+1} = 2$ ؛ $|z_C| = \sqrt{4+0} = 2$

إذن : النقط A ، B ، C تبعد بنفس المسافة 2 عن المبدأ .

منه : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها $O(0\,;0)$ و نصف قطرها 2

التمرين ــ 25

A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $z_A = 2$ ؛ $z_B = -i$ ؛ $z_C = 1 + 2\,i$

1 ــ أحسب $|z_B - z_A|$ ؛ $|z_B - z_C|$ ؛ $|z_C - z_A|$

2 ــ إستنتج طبيعة المثلث ABC

الحـــل ــ 25

1 ــ
$$|z_B - z_A| = |-i-2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$|z_B - z_C| = |-i-1-2\,i| = |-1-3\,i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$
$$|z_C - z_A| = |1+2\,i-2| = |-1+2\,i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

2 ــ **نتيجة :** $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ إذن : $AB = AC$ منه ABC متساوي الساقين .

$|z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |z_B - z_C|^2$ إذن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ منه ABC قائم في A

خلاصة : ABC مثلث قائم الزاوية في A و متساوي الساقين .

التمرين ــ 26

في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة المقترحة :

1 ــ $|z| = 2$

2 ــ $|-3\,z| = \sqrt{2}$

3 ــ $|z|^2 - 2\,Re(z) = 0$

الحـــل ــ 26

ليكن $z = x + i\,y$ لاحقة النقطة M

1 ــ $|z| = 2$ يكافئ $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

يكافئ $x^2 + y^2 = 4$

إذن : مجموعة النقط M هي نقط الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\sqrt{4} = 2$

2 ــ $|-3\,z| = \sqrt{2}$ يكافئ $3|z| = \sqrt{2}$

يكافئ $|z| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

يكافئ $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

يكافئ $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم و نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

3 ــ $|z|^2 - 2\,Re(z) = 0$ تكافئ $x^2 + y^2 - 2\,x = 0$

تكافئ $(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(1\,;0)$ و نصف قطرها 1

التمرين ــ 27

z عدد مركب . عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

1 ــ $|z + 2 + 2\,i| = |z - 4|$

2 ــ $|z - 3\,i| = 2$

3 ـ $|2z - i| = 2$

الحل ـ 27

ليكن $z = x + iy$ (الشكل الجبري لـ z)

1 ـ $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$ يكافئ $|x + iy + 1 + 2i| = |x + iy - 4|$

يكافئ $|x + 1 + (y + 2)i| = |x - 4 + iy|$

يكافئ $\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

يكافئ $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

يكافئ $10x + 4y - 11 = 0$

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $10x + 4y - 11 = 0$

2 ـ $|z - 3i| = 2$ يكافئ $|x + iy - 3i| = 2$

يكافئ $|x + i(y - 3)| = 2$

يكافئ $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2$

يكافئ $x^2 + (y-3)^2 = 4$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w(0 ; 3)$ و نصف قطرها 2

3 ـ $|2z - i| = 2$ تكافئ $|2x + 2iy - i| = 2$

تكافئ $|2x + i(2y - 1)| = 2$

تكافئ $\sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = 2$

تكافئ $4x^2 + (2y-1)^2 = 4$

تكافئ $4x^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

تكافئ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $w\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها 1

التمرين ـ 28

α عدد مركب حيث $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1 ـ أحسب α^2 ثم α^4

2 ـ أحسب $|\alpha^4|$ ثم إستنتج $|\alpha|$

3 ـ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|\alpha z| = 6$

الحل ـ 28

1 ـ
$$\alpha^2 = 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} - (2+\sqrt{2})$$
$$= 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} - 2 - \sqrt{2}$$
$$= -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$
$$= -2\sqrt{2}(1+i)$$

منه :
$$\alpha^4 = [-2\sqrt{2}(1+i)]^2$$
$$= 8(1+i)^2$$
$$= 8(1 + 2i - 1)$$
$$= 16i$$

2 ـ $|\alpha^4| = |16i| = 16$

لكن $|\alpha^4| = |\alpha|^4$:

أي : $16 = |\alpha|^4$

منه : $|\alpha| = \sqrt[4]{16}$ إذن : $|\alpha| = 2$

3 ـ $|\alpha z| = 6$ تكافئ $|\alpha| . |z| = 6$

تكافئ $2|z| = 6$

تكافئ $|z| = 3$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد بمسافة 3 عن المبدأ
أي هي الدائرة التي مركزها $O(0 ; 0)$ و نصف قطرها 3

التمرين ــ 29

z عدد مركب غير معدوم .

1 ــ باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $Arg(z^n) = n\,Arg(z)$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم p فإن $Arg(z^p) = p\,Arg(z)$

الحـل ــ 29

1 ــ من أجل $n = 1$: الخاصية محققة لأن $Arg(z^1) = 1 \times Arg(z)$

من أجل $n = 2$: $Arg(z^2) = Arg(z \times z) = Arg(z) + Arg(z) = 2\,Arg(z)$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن $Arg(z^n) = n\,Arg(z)$ من أجل $n > 2$

هل $Arg(z^{n+1}) = (n + 1)\,Arg(z)$ ؟

لدينا :
$$\begin{aligned} Arg(z^{n+1}) &= Arg(z^n \times z) \\ &= Arg(z^n) + Arg(z) \\ &= n\,Arg(z) + Arg(z) \\ &= (n + 1)\,Arg(z) \end{aligned}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $(n + 1)$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $Arg(z^n) = n\,Arg(z)$

2 ــ ليكن $p \in Z^*$ إذن : إما $p = n$ أو $p = -n$ حيث $n \in IN^*$

الحالة الأولى : $p = n$ حيث $n \in IN^*$

الخاصية محققة حسب السؤال (1)

الحالة الثانية : $p = -n$ حيث $n \in IN^*$

إذن : $z^p = z^{-n}$

منه : $z^p = \dfrac{1}{z^n}$

إذن : $Arg(z^p) = Arg\left(\dfrac{1}{z^n}\right)$

أي $Arg(z^p) = Arg(1) - Arg(z^n)$

أي $Arg(z^p) = 0 - Arg(z^n)$

أي : $Arg(z^p) = -n\,Arg(z)$

منه : $Arg(z^p) = p\,Arg(z)$ لأن $p = -n$

نتيجة : من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n فإن $Arg(z^n) = n\,Arg(z)$

التمرين ــ 30

z عدد مركب غير معدوم حيث $|z| = R$ و $Arg(z) = \theta$

عين عمدة و طويلة كل من الأعداد التالية :

$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $\dfrac{1}{z}$ ؛ z^3 ؛ $\dfrac{1}{z^n}$ حيث $n \in Z^*$

الحـل ــ 30

$\left.\begin{array}{l} |z| = R \\ Arg(z) = \theta \end{array}\right\}$ إذن : $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

1 ــ
$$\begin{aligned} -z &= -R(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= R(-\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= R[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)] \end{aligned}$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |-z| = R \\ Arg(-z) = \pi + \theta \end{array}\right\}$

2 ــ $\bar{z} = R[\cos\theta - i\sin\theta] = R[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |\bar{z}| = R \\ Arg(\bar{z}) = -\theta \end{array}\right\}$

3 – $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ، $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 - \operatorname{Arg}(z)$ إذن : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R}$ ، $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta$

4 – $|z^3| = |z|^3$ ، $\operatorname{Arg}(z^3) = 3\operatorname{Arg}(z)$ إذن : $|z^3| = R^3$ ، $\operatorname{Arg}(z^3) = 3\theta$

5 – $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z^n|}$ ، $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) = 0 - \operatorname{Arg}(z^n)$ إذن : $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{R^n}$ ، $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z^n}\right) = -n\theta$

التمرين – 31

z عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ
عين طويلة و عمدة كل من الأعداد التالية :

$$\frac{z}{4} \quad ; \quad \frac{-7}{z} \quad ; \quad 2iz \quad ; \quad (iz)^5 \quad ; \quad \left(\frac{iz}{R}\right)^n$$

الحـل – 31

في هذا التمرين نستعمل الخاصية التالية : t عدد مركب غير معدوم .

إذا كان t عدد حقيقي موجب فإن $\operatorname{Arg}(t) = 0$

إذا كان t عدد حقيقي سالب فإن $\operatorname{Arg}(t) = \pi$

إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي موجب فإن $\operatorname{Arg}(t) = \pi/2$

إذا كان t عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب فإن $\operatorname{Arg}(t) = -\pi/2$

1 – $\left|\frac{z}{4}\right| = \frac{|z|}{|4|} = \frac{R}{4}$ ؛ $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{4}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(4) = \theta$

2 – $\left|\frac{-7}{z}\right| = \frac{|-7|}{|z|} = \frac{7}{R}$ ؛ $\operatorname{Arg}\left(\frac{-7}{z}\right) = \operatorname{Arg}(-7) - \operatorname{Arg}(z) = \pi - \theta$

3 – $|2iz| = |2i| \times |z| = 2R$ ؛ $\operatorname{Arg}(2iz) = \operatorname{Arg}(2i) + \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} + \theta$

4 – $|iz|^5 = (|i| \times |z|)^5 = R^5$ ؛ $\operatorname{Arg}(iz)^5 = 5\operatorname{Arg}(iz) = 5[\arg(i) + \operatorname{Arg}(z)] = 5\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

5 – $\left|\frac{iz}{R}\right|^n = \left[\frac{|iz|}{|R|}\right]^n = \left(\frac{R}{R}\right)^n = 1$ ؛ $\operatorname{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n\operatorname{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right) = n[\operatorname{Arg}(iz) - \operatorname{Arg}(R)]$

إذن : $\operatorname{Arg}\left(\frac{iz}{R}\right)^n = n\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

التمرين – 32

في كل حالة من الحالات التالية عين طويلة و عمدة العدد المركب z

1 – $z_1 = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

2 – $z_2 = -3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

3 – $z_3 = \sqrt{5}\left[\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$

4 – $z_4 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

الحـل – 32

1 – $z_1 = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_1| = 4$ و $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{\pi}{4}$

2 – $z_2 = -3\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 3\left[-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 3\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_2| = 3$ و $Arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{3}$

3 ـ $z_3 = \sqrt{5}\left[\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$

$= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$ شكل مثلثي

إذن : $|z_3| = \sqrt{5}$ و $Arg(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

4 ـ $z_4 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)$ شكل مثلثي

إذن : $|z_4| = 1$ و $Arg(z_4) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$

التمرين ـ 33

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_5 = 3$ ؛ $z_6 = -i$ ؛ $z_7 = \frac{1}{2}i$ ؛ $z_8 = -\sqrt{5}$

الحـل ـ 33

في كل مرة نعتبر θ هي عمدة العدد المركب و R هي طويلته

1 ـ $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_1 = 1\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \frac{\pi}{4}$

2 ـ $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_2 = 1\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \pi - \frac{\pi}{4}$

3 ـ $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ إذن : $z_3 = 1\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$

4 ـ $z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ إذن : $z_4 = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ شكل مثلثي

منه : $R = 1$ ؛ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

5 ـ $z_5 = 3$ إذن : $z_5 = 3[\cos 0 + i\sin 0]$ شكل مثلثي

6 ـ $z_6 = -i$ إذن : $z_6 = 1\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$ شكل مثلثي

7 ـ $z_7 = \frac{1}{2}i$ إذن : $z_7 = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$ شكل مثلثي

8 ـ $z_8 = -\sqrt{5}$ إذن : $z_5 = \sqrt{5}[\cos\pi + i\sin\pi]$ شكل مثلثي

التمرين ـ 34

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها المثلثي

$1 + i$ ؛ $3 - 3i$ ؛ $-\sqrt{5} - i\sqrt{15}$ ؛ $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

الحـل ـ 34

1 ـ $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

إذن : $\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$ إذن : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

منه : $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

2 ـ $|3 - 3i| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}$ إذن : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

منه : $3 - 3i = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

3 ـ $|-\sqrt{5} - i\sqrt{15}| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$ لتكن θ عمدة له

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}$ منه : $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

منه : $-\sqrt{5} - i\sqrt{15} = 2\sqrt{5}\left[\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right]$

4 ـ $|-\sqrt{6} + i\sqrt{2}| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$ لتكن θ عمدة له

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$ إذن : $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

منه : $-\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right]$

التمرين ـ 35

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي .

1 ـ $z_1 = (2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$ **3 ـ** $z_3 = \dfrac{3i}{2 + 2i\sqrt{3}}$

2 ـ $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} + i}$ **4 ـ** $z_4 = \dfrac{\sqrt{6}}{1 + i}$

الحل ـ 35

في هذا التمرين نستعمل خواص العمدة و الطويلة كمايلي :

1 ـ $2 + 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

منه : $\left.\begin{array}{l}|z_1| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2} \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{12}\end{array}\right\}$

إذن : $z_1 = 4\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right]$

2 ـ $4 = 4[\cos 0 + i\sin 0]$

$\sqrt{3} + i = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |z_2| = 4/2 = 2 \\ Arg(z_2) = 0 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \end{array}\right\}$

إذن : $z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

3 ـ $3i = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

$2 + 2i\sqrt{3} = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |z_3| = 3/4 \\ Arg(z_3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{array}\right\}$

إذن : $z_3 = \frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

4 ـ $\sqrt{6} = \sqrt{6}\,[\cos 0 + i\sin 0]$

$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |z_4| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \\ Arg(z_4) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right\}$

منه : $z_4 = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

التمرين ـ 36

ليكن $z = \dfrac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}}$

1 ـ أكتب z على شكله الجبري .

2 ـ أكتب z على شكله المثلثي

3 ـ اكتب على شكلها المثلثي، كل من الأعداد $\frac{1}{z}$ ؛ z^{2009} ؛ $\bar{z}$

الحـل ـ 36

1 ـ $z = \dfrac{4 + 4i}{1 - i\sqrt{3}} \times \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{4 + 4i\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3}}{1 + 3}$

$= \dfrac{4 - 4\sqrt{3}}{4} + i\,\dfrac{4\sqrt{3} + 4}{4}$

$= (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و هو الشكل الجبري لـ z

2 ـ $4 + 4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

إذن : $\left.\begin{array}{l} |z| = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ Arg(z) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$

نتيجة : $z = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$ شكل مثلثي لـ z

3 ـ $\left.\begin{array}{l} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z) = -\frac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$ منه $\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} |z^{2009}| = |z|^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009} \\ \mathrm{Arg}(z^{2009}) = 2009\ \mathrm{Arg}(z) = 2009 \times \dfrac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$$

لاحظ أن : $\dfrac{2009 \times 7\pi}{12} = \dfrac{14063}{12}\pi = 1172\pi - \dfrac{\pi}{12}$

إذن : $\mathrm{Arg}(z^{2009}) = -\dfrac{\pi}{12}$

$$z^{2009} = (2\sqrt{2})^{2009}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

لدينا : $|\bar{z}| = |z|$ و $\bar{z} = \bar{z} \times \dfrac{z}{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$

إذن : $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = \mathrm{Arg}(|z|^2) - \mathrm{Arg}(z) = 0 - \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-7\pi}{12}$

منه : $\bar{z} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

التمرين ــ 37

ليكن $z = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2(1-i)}$

أكتب كل من الأعداد التالية على شكلها الجبري : z^6 ؛ z^{12} ؛ z^{2010}

الحـــل ــ 37

لنبحث أولا عن الشكل المثلثي للعدد z كما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right] \\ 2(1-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \end{array}\right\}$$

منه
$$\left.\begin{array}{l} |z| = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1 \\ \mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{7\pi}{12} \end{array}\right\}$$

نتيجة : $z = \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(7\dfrac{\pi}{12}\right)$

باستعمال قانون موافر نحصل على النتائج التالية :

$$\begin{aligned} z^6 &= \cos\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(6 \times \frac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(7\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 - i \\ &= -i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 14070 & 12 \\ \cline{2-2} 20 & 1172 \\ 87 & \\ 84 & \\ \hline 30 & \\ 6 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} z^{12} &= \cos\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(12 \times \frac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos 7\pi + i\sin 7\pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{2010} &= \cos\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(2010 \times \frac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(1172\pi + 6\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(1172\pi + 6\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= i \end{aligned}$$

التمرين ــ 38

أكتب على شكلها الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$6\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad \sqrt{5}\,e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad ; \quad \frac{1}{2}\,e^{i\pi} \quad ; \quad 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

الحـل ــ 38

$$6\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 6\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$
$$= 6\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$
$$= -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5}\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{5}\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$$
$$= \sqrt{5}\,[0 - i]$$
$$= -i\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2}\,e^{i\pi} = \frac{1}{2}\,[\cos\pi + i\sin\pi]$$
$$= \frac{1}{2}\,[-1 + 0\,i]$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{3}\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$
$$= -\sqrt{3} - 3i$$

التمرين ــ 39

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الأسي :

1 ــ $2 - 2i$ 3 ــ $\frac{5}{4}i$

2 ــ $3\sqrt{3} - 3i$ 4 ــ -1

الحـل ــ 39

1 ــ $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2 ــ $3\sqrt{3} - 3i = 6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 6\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

3 ــ $\frac{5}{4}i = \frac{5}{4}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{5}{4}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

4 ــ $-1 = 1[\cos\pi + i\sin\pi] = e^{i\pi}$

التمرين ــ 40

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية :

1 ــ $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ 3 ــ $-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2 ــ $-3\,e^{i\frac{\pi}{8}}$

الحـل ــ 40

في هذا التمرين نستعمل الخاصية $-1 = e^{i\pi}$

1 ــ $-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{12})} = e^{i\frac{13}{12}\pi}$

2 – $-3e^{i\frac{\pi}{8}} = 3\times e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{8}} = 3\times e^{9\frac{\pi}{8}i}$

3 – $-\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\times e^{i\pi}\times e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

التمرين – 41

أعط الشكل الأسي لكل من الأعداد المركبة التالية :

1 – $z_1 = (2\sqrt{3}+6i)\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ 3 – $z_3 = (1-\sqrt{2})\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 – $z_2 = (\sqrt{3}+i\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ 4 – $z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

الحل – 41

1 –
$$z_1 = (2\sqrt{3}+6i)\,e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

2 –
$$z_2 = (\sqrt{3}+i\sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{3}\,.\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{6}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{6}\times e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$= \sqrt{6}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

3 –
$$z_3 = (1-\sqrt{2})\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= (\sqrt{2}-1)(\cos\pi+i\sin\pi)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= (\sqrt{2}-1)\,e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= (\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

4 –
$$z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$
$$= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$
$$= 3\,e^{-i\frac{\pi}{7}}$$

التمرين – 42

في كل حالة ممايلي اكتب العدد المركب z على شكله الأسي ثم إستنتج الشكل الجبري لـ $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$:

1 – $z = \frac{6}{1+i}$ 2 – $z = (1+i\sqrt{3})^4$

3 – $z = 3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

الحل – 42

في هذا التمرين نستعمل الخاصيتين التاليتين :

$$\overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta)+i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\times\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z}$$

1 ـ $z = \frac{6}{1+i}$ إذن : $z = \frac{6(\cos 0 + i \sin 0)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)}$

منه : $z = \frac{6\, e^{i0}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}$

أي $z = \frac{6}{\sqrt{2}}\, e^{-i\pi/4}$

نتيجة :
$$\left.\begin{array}{l} \bar{z} = \frac{6}{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/4} = \frac{6}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 3 + 3\,i \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 \times (3 + 3\,i) = \frac{2}{36}(3 + 3\,i) = \frac{1}{6} + \frac{i}{6} \end{array}\right\}$$

2 ـ $z = (1 + i\sqrt{3})^4$ إذن : $z = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$

أي $z = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)^4$

أي $z = 16\, e^{4i\frac{\pi}{3}}$

نتيجة :
$$\left.\begin{array}{l} \bar{z} = 16\, e^{-4i\frac{\pi}{3}} = 16\left[-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -8 + 8\,i\sqrt{3} \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \times (-8 + 8\,i\sqrt{3}) = \frac{-1}{32} + \frac{1}{32}\,i\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

3 ـ $z = 3\,i\,e^{i\pi/3}$ إذن : $z = 3 \times e^{i\pi/2} \times e^{i\pi/3}$

أي $z = 3\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

نتيجة :
$$\left.\begin{array}{l} \bar{z} = 3\, e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 3\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \frac{-3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i \\ \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left[\frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right] = \frac{-1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\,i \end{array}\right\}$$

التمرين ـ 43

حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلات التالية :

1 ـ	$2z^2 - 6z + 5 = 0$	**5 ـ**	$z^2 - 5z + 9 = 0$
2 ـ	$z^2 + z + 1 = 0$	**6 ـ**	$z^2 - 2z + 3 = 0$
3 ـ	$z^2 = z + 1$	**7 ـ**	$z^2 + 3 = 0$
4 ـ	$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$	**8 ـ**	$z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

الحـل ـ 43

1 ـ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$

إذن : $\Delta = (2\,i)^2$

منه : حلول المعادلة هي
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \frac{6 - 2\,i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,i \\ z_2 = \frac{6 + 2\,i}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i \end{array}\right\}$$

2 ـ $z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

منه حلول المعادلة هي
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$

3 ـ $z^2 = z + 1$ تكافئ $z^2 - z - 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4(-1) = 5 = (\sqrt{5})^2$$

منه حلول المعادلة هي $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$

4 ـ $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$

$$\Delta = 64 \times 3 - 4 \times 64 = -64 = (8\,i)^2$$

إذن حلول المعادلة هي : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} - 8\,i}{2} = 4\sqrt{3} - 4\,i \\ z_2 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8\,i}{2} = 4\sqrt{3} + 4\,i \end{array} \right.$

5 ـ $z^2 - 5\,z + 9 = 0$

$$\Delta = 25 - 4(9) = -11 = (i\sqrt{11})^2$$

إذن حلول المعادلة هي $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5 - i\sqrt{11}}{2} = \dfrac{5}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{11}}{2} \\ z_2 = \dfrac{5 + i\sqrt{11}}{2} = \dfrac{5}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{11}}{2} \end{array} \right.$

6 ـ $z^2 - 2\,z + 3 = 0$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 = (2\,i\sqrt{2})^2$$

إذن : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2 - 2\,i\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2} \\ z_1 = \dfrac{2 + 2\,i\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2} \end{array} \right.$

7 ـ $z^2 + 3 = 0$ تكافئ $z^2 = -3$

تكافئ $z = i\sqrt{3}$ أو $z = -i\sqrt{3}$

8 ـ $z^2 - 2(1+\sqrt{2})\,z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

$$\Delta = 4(1 + 2\sqrt{2} + 2) - 8(\sqrt{2}+2) = 12 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} - 16 = -4 = (2\,i)^2$$

إذن : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) - 2\,i}{2} = (1+\sqrt{2}) - i \\ z_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) + 2\,i}{2} = (1+\sqrt{2}) + i \end{array} \right.$

التمرين ـ 44

θ عدد حقيقي ثابت . حل في C المعادلة التالية ذات المجهول z :

1 ـ $z^2 - 2(\cos\theta)\,z + 1 = 0$

2 ـ $z^2 - 2(\sin\theta)\,z + 1 = 0$

الحـل ـ 44

1 ـ $z^2 - 2(\cos\theta)\,z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2\,i\sin\theta)^2$ لأن $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$

إذن حلول المعادلة هي $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2\cos\theta - 2\,i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta \\ z_2 = \dfrac{2\cos\theta + 2\,i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \end{array} \right.$

2 ـ $z^2 - 2(\sin\theta)\,z + 1 = 0$

$\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1) = -4\cos^2\theta = (2\,i\cos\theta)^2$ لأن $\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta$

إذن حلول المعادلة هي $\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta \\ z_2 = \dfrac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta \end{array}\right\}$

التمرين ــ 45

حل في C^2 الجملة التالية ذات المجهولين المركبين z و t : $\left.\begin{array}{l} z\,t = 5 \\ z + t = -2 \end{array}\right\}$

الحـل ــ 45

إذا وجد z و t فإنهما حلول للمعادلة $z^2 + 2z + 5 = 0$ (مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة 2)

إذن يكفي حل هذه المعادلة في C كمايلي :

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{-2-4i}{2} = -1-2i \\ z_2 = \dfrac{-2+4i}{2} = -1+2i \end{array}\right\}$

نتيجة : $(z\,;t) \in \{(-1-2i\,;-1+2i)\,;(-1+2i\,;-1-2i)\}$

تحقيق : $(-1-2i) + (-1+2i) = -2$

$(-1-2i)(-1+2i) = 1 + 4 = 5$

التمرين ــ 46

أوجد العددين المركبين α و β حتى تكون حلول المعادلة $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ في C هي $1+2i$ و $3-5i$

الحـل ــ 46

مجموع الحلين هو : $(3-5i) + (1+2i) = 4 - 3i$

جداء الحلين هو : $(3-5i)(1+2i) = 3 + 6i - 5i + 10 = 13 + i$

إذن : المعادلة التي حلولها $(3-5i)$ و $(1+2i)$ هي $z^2 - (4-3i)z + 13 + i = 0$

منه : $\alpha = -(4-3i)$ و $\beta = 13 + i$

ملاحظة : يمكن البحث عن α و β بطريقة أخرى كمايلي :

$$\begin{aligned}(z-(1+2i))(z-(3-5i)) &= z^2 - (3-5i)z - (1+2i)z + (1+2i)(3-5i) \\ &= z^2 - z(3-5i+1+2i) + 3 - 5i + 6i + 10 \\ &= z^2 - (4-3i)z + 13 + i\end{aligned}$$

بالمطابقة مع $z^2 + \alpha z + \beta$ فإن $\left.\begin{array}{l} \alpha = -(4-3i) \\ \beta = 13 + i \end{array}\right\}$

التمرين ــ 47

حل في C المعادلة $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

الحـل ــ 47

نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 + 3t + 2 = 0$ ذات المجهول المركب t

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \\ t_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} z^2 = -2 \\ \text{أو} \\ z^2 = -1 \end{array}\right\}$ أي $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$ أو $z = i$ أو $z = -i$

نتيجة : حلول المعادلة هي $\{\,i\,;-i\,;i\sqrt{2}\,;-i\sqrt{2}\,\}$

التمرين ــ 48

حل في C المعادلة $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

الحـل ــ 48

نضع $t = z^2$ و نحل المعادلة $t^2 - 32t - 144 = 0$

$$\Delta = (32)^2 + 4 \times 144 = 64 \times 16 + 64 \times 9 = 64 \times 25 = (40)^2$$

إذن : $\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{32-40}{2} = -4 \\ t_2 = \dfrac{32+40}{2} = 36 \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} z^2 = -4 \\ z^2 = 36 \end{array}\right\}$ إذن : $z \in \{2i ; -2i ; 6 ; -6\}$

أي حلول المعادلة هي $\{2i ; -2i ; 6 ; -6\}$

التمرين ــ 49

1 ــ حل في C المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ ثم أكتب الحلول على شكلها المثلثي .

2 ــ إستنتج حلول المعادلة $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$ .....(I)

الحــل ــ 49

1 ــ $z^2 - 2z + 2 = 0$:

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1 - i \\ z_2 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

الشكل المثلثي للحلول :

$$\begin{cases} z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \\ z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] \end{cases}$$

2 ــ المعادلة (I) تكافئ $\left.\begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} t = -iz + 3i + 3 \\ t \in \{1 - i ; 1 + i\} \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} 1 - i = -iz + 3i + 3 \\ \text{أو} \\ 1 + i = -iz + 3i + 3 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} -iz = 1 - i - 3i - 3 \\ \text{أو} \\ -iz = 1 + i - 3i - 3 \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{-2-4i}{-i} \\ \text{أو} \\ z = \dfrac{-2-2i}{-i} \end{array}\right\}$

تكافئ $\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{-2-4i}{-i} \times \dfrac{i}{i} \\ \text{أو} \\ z = \dfrac{-2-2i}{-i} \times \dfrac{i}{i} \end{array}\right\}$

تكافئ $z \in \{4 - 2i ; 2 - 2i\}$ و هي حلول المعادلة

التمرين ــ 50

1 ــ عين الجذرين التربيعيين للعدد $L = 2 - 2i\sqrt{3}$

2 ــ حل في C المعادلة $2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$

الحــل ــ 50

1 ــ ليكن $L = (\alpha + i\beta)^2$ حيث $\alpha \in R$ و $\beta \in R$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{2+|L|}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{4+12}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+4}{2}} = \sqrt{3} \\ \beta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\alpha} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$ (أنظر الدرس)

نتيجة : $L = (\sqrt{3} - i)^2$

تحقيق : $(\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2i\sqrt{3} - 1 = L$

2 ـ $2z^2 + 4iz + i\sqrt{3} - 3 = 0$

$$\Delta = -16 - 4(2)(i\sqrt{3} - 3) = -16 - 8i\sqrt{3} + 24 = 8 - 8i\sqrt{3} = 4(2 - 2i\sqrt{3})$$

إذن : $\Delta = 4L$

منه : $\Delta = [2(\sqrt{3} - i)]^2$ أي $\Delta = (2\sqrt{3} - 2i)^2$

إذن :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-4i - (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2i}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i \\ z_2 = \dfrac{-4i + (2\sqrt{3} - 2i)}{4} = \dfrac{2\sqrt{3} - 6i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \end{cases}$$

التمرين ـ 51

1 ـ عين العدد الحقيقي x حيث $(x + 2i)^2 = -3 + 4i$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$

الحـل ـ 51

1 ـ $(x + 2i)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow x^2 + 4ix - 4 = -3 + 4i$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4ix = 1 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

نتيجة : $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$

2 ـ $z^2 - (3 - 4i)z - 1 - 7i = 0$

$$\Delta = (3 - 4i)^2 - 4(-1 - 7i)$$
$$= 9 - 24i - 16 + 4 + 28i$$
$$= -3 + 4i$$

حسب السؤال الأول $= (1 + 2i)^2$

إذن :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{3 - 4i - (1 + 2i)}{2} = 1 - 3i \\ z_2 = \dfrac{3 - 4i + (1 + 2i)}{2} = 2 - i \end{cases}$$

التمرين ـ 52

لتكن المعادلة $z^2 - (\sqrt{3} + 1 + 2i)z + (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i = 0$ .....(1)

أحسب $(\sqrt{3} - 1)^2$ ثم حل في C المعادلة (1)

الحـل ـ 52

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\Delta = [(\sqrt{3} + 1) + 2i]^2 - 4[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i]$$
$$= 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 4i(\sqrt{3} + 1) - 4 - 4(\sqrt{3} - 1) - 4i(\sqrt{3} + 1)$$
$$= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4$$
$$= 4 - 2\sqrt{3}$$

حسب السؤال الأول $= (\sqrt{3} - 1)^2$

منه حلول المعادلة هي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1+2i-(\sqrt{3}-1)}{2} = 1+i \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1+2i+(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}+i \end{cases}$$

التمرين ــ 53

أحسب $(\sqrt{3}+3i)^2$ ثم حل في C المعادلة $2z^2+(3\sqrt{3}+i)z+4=0$

الحـل ــ 53

$$(\sqrt{3}+3i)^2 = 3+6i\sqrt{3}-9 = -6+6i\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (3\sqrt{3}+i)^2-4(2)(4)\\ &= 27+6i\sqrt{3}-1-32\\ &= -6+6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$= (\sqrt{3}+3i)^2$ حسب السؤال الأول

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(3\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+3i)}{4} = \dfrac{-4\sqrt{3}-4i}{4} = -\sqrt{3}-i \\ z_2 = \dfrac{-(3\sqrt{3}+i)+(\sqrt{3}+3i)}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

التمرين ــ 54

1 ــ عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3+4i$

2 ــ حل في C المعادلة $z^2-2(1+2i)z+9+20i=0$

الحـل ــ 54

1 ــ ليكن $(\alpha+\beta i)^2 = 3+4i$

إذن : $\begin{cases}\alpha = \sqrt{\dfrac{3+|3+4i|}{2}} \\ \beta = \dfrac{4}{2\alpha}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha = \sqrt{\dfrac{3+5}{2}} \\ \beta = \dfrac{4}{2\alpha}\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha = 2 \\ \beta = \dfrac{4}{4} = 1\end{cases}$

نتيجة : $(2+i)^2 = 3+4i$

منه : الجذران التربيعيان لـ $3+4i$ هما $\{-2-i\,;\,2+i\}$

2 ــ حل المعادلة :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(1+2i)^2-4(9+20i)\\ &= 4+16i-16-36-80i\\ &= -48-64i\\ &= -16(3+4i)\\ &= [4i(2+i)]^2\\ &= (8i-4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+2i)-(8i-4)}{2} = \dfrac{6-4i}{2} = 3-2i \\ z_2 = \dfrac{2(1+2i)+(8i-4)}{2} = \dfrac{-2+12i}{2} = -1+6i \end{cases}$$

التمرين ــ 55

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيين $(x\,;\,y)$ النقطة M' ذات الإحداثيين $(x'\,;\,y')$

حيث : $\begin{cases} x' = -3x+2y+1 \\ y' = 5x-3y \end{cases}$

1 ــ عين إحداثيات A' صورة النقطة $A(-1\,;\,1)$ بالتحويل T

2 ــ عين إحداثيات B سابقة النقطة $B'(-2\,;\,3)$ بالتحويل T

3 ــ عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T

الحل ـ 55

1 ـ لتكن $A'(x' ; y')$ إذن : $\begin{cases} x' = -3(-1) + 2(1) + 1 = 6 \\ y' = 5(-1) - 3(1) = -8 \end{cases}$

منه : $A'(6 ; -8)$

2 ـ لتكن $B(x ; y)$ إذن : $\begin{cases} -2 = -3x + 2y + 1 \\ 3 = 5x - 3y \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -3x + 2y + 3 = 0 \\ 5x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$

نحل جملة المعادلتين كما يلي :

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا : $\begin{cases} x = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \\ y = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 9 = -6 \end{cases}$

نتيجة : $B(-3 ; -6)$

3 ـ لتكن $w(x ; y)$ نقطة من المستوي .

$w(x ; y)$ صامدة بـ T يكافئ $T(w) = w$

يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -3x + 2y + 1 = x \\ 5x - 3y = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -4x + 2y + 1 = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$ جملة معادلتين ذات مجهولين حقيقيين

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 10 = 6$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا . $\begin{cases} x = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \text{—} \end{cases}$

نتيجة : توجد نقطة صامدة وحيدة بالتحويل T و هي $w\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{6}\right)$

تحقيق : لتكن $w'(x' ; y')$ صورة $w\left(\frac{2}{3} ; \frac{5}{6}\right)$

إذن : $\begin{cases} x' = -3\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 1 = \frac{-6 + 5 + 3}{3} = \frac{2}{3} \\ y' = 5\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \end{cases}$

التمرين ـ 56

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ النقطة $M'(x' ; y')$ حيث $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 12 \\ y' = -\frac{3}{2}x + 2y - 4 \end{cases}$

1 ـ عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل T

2 ـ أثبت أن إذا كانت M ليست صامدة فإن منتصف القطعة $[MM']$ ينتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته .

3 ـ أثبت أن M' تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب معادلته

الحل ـ 56

1 ـ لتكن $w(x ; y)$ نقطة من المستوي .

w صامدة يكافئ $T(w) = w$

يكافئ $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -3x+4y-12=x \\ -\frac{3}{2}x+2y-4=y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -4x+4y-12=0 \\ -\frac{3}{2}x+y-4=0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 3x-2y+8=0 \end{cases}$ (جملة معادلتين)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2+3=1$$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا : $\begin{cases} x=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -8+6=-2 \\ y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9-8=1 \end{cases}$

نتيجة : T يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $w(-2\,;1)$

2 ــ لتكن M نقطة من المستوي حيث M لا تنطبق على w

نسمي A منتصف القطعة [MM']

نضع $A(X\,;Y)$ إحداثيات النقطة A

إذن : $\begin{cases} X=\frac{x'+x}{2} \\ Y=\frac{y+y'}{2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} X=\frac{-3x+4y-12+x}{2} \\ Y=\frac{-\frac{3}{2}x+2y-4+y}{2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} X=\frac{-2x+4y-12}{2} \\ Y=\frac{\frac{1}{2}(-3x+6y-8)}{2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} X=-x+2y-6 \\ Y=\frac{-3}{4}x+\frac{3}{2}y-2 \end{cases}$

منه : $3X-4Y=-3x+6y-18+3x-6y+8$

أي : $3X-4Y=-10$

أي : $3X-4Y+10=0$ (مستقل عن x و y)

نتيجة : إذا كانت M تختلف عن w فإن منتصف [MM'] ينتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $3x-4y+10=0$

3 ــ لتكن $M'(X\,;Y)$ إذن : $\begin{cases} X=-3x+4y-12 \\ Y=-\frac{3}{2}x+2y-4 \end{cases}$

منه : $X-2Y=-3x+4y-12-2\left(\frac{-3}{2}x+2y-4\right)$

أي : $X-2Y=-3x+4y-12+3x-4y+8$

أي $X-2Y=-4$

أي $X-2Y+4=0$

نتيجة : النقطة M' تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $x-2y+4=0$

التمرين ـ 57

ABC مثلث . E ، F ، G هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ و I ، J ، K هي صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$

أثبت أن C هي منتصف القطعة [IG]

الحـل ـ 57

لدينا : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}$ إذن : E تنطبق على B

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}$ إذن : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC}$ إذن : J تنطبق على C

$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BC}$

نتائج : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$ إذن : الرباعي ICBA متوازي أضلاع .

أي الرباعي ICEA متوازي أضلاع لأن E تنطبق على B

منه : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IC}$

إذن : $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$

$= \vec{0}$

منه : C هي منتصف [IG]

التمرين ـ 58

أكتب معادلة (Δ') صورة المستقيم (Δ) ذو المعادلة $3x + 2y - 5 = 0$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

الحـل ـ 58

لنبحث عن عبارة الانسحاب ذو الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

لتكن $M(x ; y)$ و $M'(x' ; y')$ نقطتين من المستوي .

M' صورة M يكافئ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

يكافئ $\begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -3 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ و هي عبارة الانسحاب

نبحث الآن عن عبارتي x و y بدلالة x' و y'

$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

نتيجة : إذا كانت $M(x ; y)$ نقطة من (Δ) فإن $3x + 2y - 5 = 0$

أي $3(x' - 2) + 2(y' + 3) - 5 = 0$

أي $3x' - 6 + 2y' + 6 - 5 = 0$

أي $3x' + 2y' - 5 = 0$

منه : معادلة (Δ') هي : $3x + 2y - 5 = 0$

أي : (Δ') ينطبق على (Δ)

التمرين ـ 59

T تحويل نقطي للمستوي يرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ النقطة $M'(x' ; y')$. في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة التحويل T و عناصره الهندسية المميزة

1 ـ $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

2 ـ $\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 4 \end{cases}$

الحـل ـ 59

للبحث عن طبيعة التحويلين نبحث عن شكلهما المركب كمايلي :

نضع $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$ ثم نبحث عن عبارة z' بدلالة z

1 ـ $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ منه $x' + i\,y' = (x - 4) + i(y + 2)$

أي $x' + i\,y' = x + i\,y - 4 + 2\,i$

أي $z' = z - 4 + 2\,i$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = z + \beta$ حيث $\beta = -4 + 2\,i$

إذن : T هو انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 ـ $\begin{cases} x' = -2\,x - 3 \\ y' = -2\,y + 4 \end{cases}$ منه $x' + i\,y' = -2\,x - 3 + i(-2\,y + 4)$

أي $x' + i\,y' = -2\,x - 2\,i\,y - 3 + 4\,i$

أي $x' + i\,y' = -2(x + i\,y) - 3 + 4\,i$

أي $z' = -2\,z - 3 + 4\,i$

نتيجة : التحويل T من الشكل $z' = \alpha\,z + \beta$ حيث $\alpha \in R^* - \{1\}$

إذن : T هو تحاكي نسبته (-2) و مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\dfrac{3 - 4\,i}{-2 - 1}$

أي $w\left(-1 ; \dfrac{4}{3}\right)$

التمرين ـ 60

أكتب العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

الحـل ـ 60

عبارة الانسحاب الذي شعاعه هو صورة العدد المركب β هي : $z' = z + \beta$

إذن : $\beta = -1 + 2\,i$ لأن $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

منه : $z' = z - 1 + 2\,i$ هي عبارة الانسحاب

التمرين ـ 61

أكتب العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 3

الحـل ـ 61

عبارة التحاكي ذات النسبة 3 هي : $z = 3\,z + \beta$ حيث المركز هو النقطة ذات اللاحقة $\dfrac{-\beta}{3 - 1}$

منه : $\dfrac{-\beta}{3 - 1} = 0$ أي $\beta = 0$ لأن الركز هو $O(0 ; 0)$

نتيجة : عبارة التحاكي هي $z' = 3\,z$

التمرين ـ 62

w نقطة لاحقتها $1 - i$

عين العبارة المركبة للتحاكي H الذي نسبته $-\dfrac{1}{2}$ و مركزه w

الحـل ـ 62

H تحاكي نسبته $-\dfrac{1}{2}$ إذن عبارة H هي $z' = -\dfrac{1}{2}\,z + \beta$ حيث $\beta \in C$

و $\dfrac{-\beta}{-\dfrac{1}{2} - 1}$ هي لاحقة المركز w

إذن : $1 - i = \dfrac{-\beta}{-\dfrac{1}{2} - 1}$

أي $1 - i = \dfrac{2\,\beta}{3}$

منه : $\beta = \dfrac{3(1 - i)}{2}$

أي $\beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}\,i$

نتيجة : عبارة التحاكي H هي $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

التمرين ــ 63

أكتب العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه مبدأ المعلم و زاويته $\frac{\pi}{6}$

الحــل ــ 63

زاوية الدوران R هي $\frac{\pi}{6}$ إذن عبارته : $z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z + \beta$ حيث

$\frac{-\beta}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1}$ هي لاحقة المركز

منه : $\frac{-\beta}{\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - 1} = 0$ أي $\beta = 0$

إذن : عبارة الدوران R هي : $z' = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)z$

أي $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$

التمرين ــ 64

t تحويل نقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = \alpha z + \beta$

في كل حالة من الحالات التالية عين طبيعة التحويل t و عناصره الهندسية المميزة .

1 ــ $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 3 + i$

2 ــ $\alpha = i$ ؛ $\beta = 1 - i$

3 ــ $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\beta = 0$

4 ــ $\alpha = \frac{5}{2}$ ؛ $\beta = \frac{2i}{5}$

الحــل ــ 64

1 ــ $\alpha = 1$ إذن : t هو الانسحاب الذي شعاعه صورة العدد β

أي : t انسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

2 ــ $\alpha = i$ إذن : $|\alpha| = 1$

منه : t دوران مركزه w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و الزاوية $\theta = \mathrm{Arg}(\alpha)$

لدينا $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1$ إذن : مركز الدوران هو $w(1 ; 0)$

$\alpha = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ إذن : زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$

3 ــ $\alpha = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

منه $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}|1 - i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 + 1} = 1$

إذن : t هو دوران مركزه النقطة w ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و زاويته $\theta = \mathrm{Arg}(\alpha)$

لدينا : $\frac{-\beta}{\alpha - 1} = 0$ إذن : المركز هو المبدأ $O(0 ; 0)$

$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ إذن : زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{4}$

4 ــ $\alpha = 5/2$ إذن : $\alpha \in R^* - \{1\}$

إذن : t هو تحاكي نسبته 5/2 و مركزه W ذات اللاحقة

$\frac{-\beta}{\alpha - 1} = \frac{-\frac{2}{5}i}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}i = \frac{-4}{15}i$ إذن : المركز هو $w(0 ; -4/15)$

التمرين ــ 65

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب $z_1 = 3 + i$ ؛ $z_2 = -2 + 3i$ ؛ $z_3 = 8 - i$

1 ــ عين نسبة التحاكي h ذو المركز C و الذي يحول A إلى B

2 ــ المستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل نقطي معين نقول عنه أنه صامد إجماليا بهذا التحويل . برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2 صامد إجماليا بالتحويل h ثم أكتب معادلة له .

الحــل ــ 65

1 ــ لتكن α نسبة التحاكي h حيث $\alpha \in R^* - \{1\}$

$h(A) = B$ يكافئ $\overrightarrow{CB} = \alpha \overrightarrow{CA}$

يكافئ $z_2 - z_3 = \alpha(z_1 - z_3)$

يكافئ $\alpha = \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{-2 + 3i - (8 - i)}{3 + i - (8 - i)}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{-10 + 4i}{-5 + 2i}$

يكافئ $\alpha = \dfrac{2(-5 + 2i)}{-5 + 2i}$

يكافئ $\alpha = 2$

إذن : نسبة التحاكي h هي 2

2 ــ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C و معامل توجيهه 2

إذا كانت M نقطة من (Δ) و M' صورة M بالتحويل h فإن : $\overrightarrow{CM'} = 2\overrightarrow{CM}$

إذن : النقط C ، M و M' على استقامة واحدة

منه : M' تنتمي إلى (Δ)

إذن : صورة (Δ) بالتحويل h تنطبق على (Δ)

نتيجة : المستقيم (Δ) صامد إجماليا بالتحويل h

معادلة (Δ) : معامل توجيه (Δ) هو 2 إذن : معادلة (Δ) : $y = 2x + b$ حيث $b \in R$

بما أن C تنتمي إلى (Δ) فإن : $-1 = 2(8) + b$

أي : $b = -17$

نتيجة : (Δ) له المعادلة $y = 2x - 17$

التمرين ــ 66

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z_1 = \frac{1}{2}(1 - i)$ ؛ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} i$

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم و يحول A إلى B

الحــل ــ 66

O هو مركز الدوران . و لتكن θ زاويته .

صورة A هي B إذن : $\theta = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$

أي : $\theta = \mathrm{Arg}(z_B - z_O) - \mathrm{Arg}(z_A - z_O)$

لدينا
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) \\ -\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{2}(1 - i)\right) \end{array}\right\}$$

أي $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

أي $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

نتيجة : زاوية الدوران هي $\dfrac{3\pi}{4}$

التمرين ــ 67

t تحويل نقطي للمستوي معرف بـــ $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x - 2 \end{cases}$

نضع $z = x + i y$ و $z' = x' + i y'$

1 ــ أكتب z' بدلالة z

2 ــ ماهي الطبيعة الهندسية و العناصر المميزة للتحويل t ؟

الحـــل ــ 67

1 ــ
$$x' + i y' = 1 - y + i(x - 2)$$
$$= 1 - y + i x - 2 i$$
$$= i(x + i y) + 1 - 2 i$$

إذن : $z' = i z + 1 - 2 i$

2 ــ نتيجة : التحويل t من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\begin{cases} \alpha = i \\ \beta = 1 - 2 i \end{cases}$

$|\alpha| = |i| = 1$ إذن : t دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة $\frac{-\beta}{\alpha - 1}$ و زاويته $\theta = Arg(\alpha)$

المركز : $\frac{-(1 - 2 i)}{i - 1} = \frac{-(1 - 2 i)}{i - 1} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{1 + i - 2 i + 2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$

إذن : مركز الدوران هو $w\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

$\theta = Arg(i) = \frac{\pi}{2}$ إذن زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$

التمرين ــ 68

t تحويل نقطي للمستوي حيث $\begin{cases} x' = 2 x - \frac{3}{2} \\ y' = 2 y + \frac{1}{2} \end{cases}$

أكتب العبارة المركبة للتحويل t ثم إستنتج طبيعته و عناصره المميزة .

الحـــل ــ 68

ليكن $z = x + i y$ و $z' = x' + i y'$

$$x' + i y' = 2 x - \frac{3}{2} + i\left(2 y + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 x - \frac{3}{2} + 2 y i + \frac{1}{2} i$$
$$= 2(x + i y) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$$

منه : $z' = 2 z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$

نتيجة : t هو تحاكي نسبته 2 و مركزه النقطة w ذات اللاحقة

$\frac{-\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\right)}{2 - 1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$ إذن : المركز هو $w\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

التمرين ــ 69

حل في C^2 الجملة $\begin{cases} 3 z + t = 2 - 5 i \\ z - t = -2 + i \end{cases}$ ذات المجهولين z و t

الحـــل ــ 69

الجملة تكافئ $\begin{cases} 3 z + t + z - t = 2 - 5 i - 2 + i \\ t = z + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 4 z = -4 i \\ t = z + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = -i \\ t = -i + 2 - i \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z = -i \\ t = 2 - 2i \end{cases}$

التمرين ــ 70

حل في C^2 الجملة $\begin{cases} 2iz + t = 2i \\ 3z - it = 1 \end{cases}$ ذات المجهولين z و t

الحـل ــ 70

يمكن استعمال طريقة المحدد كمايلي :

$$\begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 3 & -i \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

إذن الجملة تقبل حلا وحيدا $(z ; t)$ حيث :

$$\begin{cases} z = -\begin{vmatrix} 1 & -2i \\ -i & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1 \\ t = -\begin{vmatrix} -2i & 2i \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-6i + 2i) = 4i \end{cases}$$

تحقيق : $\begin{cases} 2i(-1) + 4i = 2i \\ 3(-1) - i(4i) = -3 + 4 = 1 \end{cases}$

ملاحظة : يمكن حل هذه الجملة باستعمال طريقة الجمع و التعويض .

التمرين ــ 71

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = 1$

الحـل ــ 71

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{1+2i-1}{1+1}$$
$$= i$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

إذن :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{4n}$$
$$= \cos 4n\frac{\pi}{2} + i\sin 4n\frac{\pi}{2}$$
$$= \cos 2\pi n + i\sin 2\pi n$$
$$= 1$$

التمرين ــ 72

برر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ حقيقيان .

الحـل ــ 72

1 ــ

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن :

$$(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$$
$$= (\sqrt{2})^8 \times \left[\cos 8 \times \frac{\pi}{4} + i\sin 8\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= 16[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$$
$$= 16$$

إذن : $(1+i)^8$ عدد حقيقي .

2 ــ

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن :

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

$$= \cos\left(-2008\,\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-2008\,\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos(-502\,\pi) + i\sin(-502\,\pi)$$
$$= 1$$

إذن : $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

التمرين ـ 73

في كل من الحالات التالية عين الطبيعة الهندسية لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق المساواة :

1 ـ $Re(z) = -3$ 3 ـ $Re(z) = Im(z)$

2 ـ $Im(z) = 2$ 4 ـ $[Re(z+1)]^2 - Im(z-2) = 0$

الحـل ـ 73

لدينا $z = x + i\,y$ إذن : $\begin{cases} z+1 = (x+1) + i\,y \\ z-2 = (x-2) + i\,y \end{cases}$

1 ـ $Re(z) = -3$ يكافئ $x = -3$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $x = -3$

2 ـ $Im(z) = 2$ يكافئ $y = 2$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $y = 2$

3 ـ $Re(z) = Im(z)$ يكافئ $x = y$ إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم ذو المعادلة $x = y$ (المنصف الأول)

4 ـ $[Re(z+1)]^2 - Im(z-2) = 0$ يكافئ $(x+1)^2 - y = 0$

يكافئ $y = (x+1)^2$

إذن : مجموعة النقط M هي منحنى الدالة f المعرفة على R بـ $f(x) = (x+1)^2$

التمرين ـ 74

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ، z ، z^2

عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حتى تكون النقط A ؛ B ؛ C على إستقامة واحدة .

الحـل ـ 74

ليكن $z = x + i\,y$

إذن : $z^2 = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

منه : $A(1\,;0)$ ؛ $B(x\,;y)$ ؛ $C(x^2 - y^2\,;2\,x\,y)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x^2-y^2-1 \\ 2\,x\,y \end{pmatrix}$

نتيجة : A ، B ، C على إستقامة واحدة يكافئ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

يكافئ $\begin{vmatrix} x-1 & x^2-y^2-1 \\ y & 2\,x\,y \end{vmatrix} = 0$

يكافئ $2\,x\,y(x-1) = y(x^2 - y^2 - 1)$

مناقشة : إذا كان $y = 0$ فإن المساواة $2\,x\,y(x-1) = y(x^2-y^2-1)$ دائما محققة إذن : محور الفواصل هو جزء من مجموعة النقط المطلوبة

إذا كان $y \neq 0$ المساواة تصبح : $2\,x(x-1) = x^2 - y^2 - 1$

أي : $2\,x^2 - 2\,x = x^2 - y^2 - 1$

أي : $y^2 = x^2 - 1 - 2\,x^2 + 2\,x$

أي : $y^2 = -x^2 + 2\,x - 1$

أي : $y^2 = -(x^2 - 2\,x + 1)$

أي : $y^2 = -(x-1)^2$

أي : $x = 1$ و $y = 0$

خلاصة : مجموعة النقط M التي تحقق أن A ، B ، C على إستقامة واحدة هي محور الفواصل فقط .

التمرين ـ 75

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 + (-1-5\,i)\,z^2 + (-7-4\,i)\,z - 2 + 12\,i$

أثبت أن p يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه

الحـل ـ 75

ليكن $\alpha \in R$

α جذر لـ p يكافئ $p(\alpha) = 0$

يكافئ $\alpha^3 + (-1 - 5i)\alpha^2 + (-7 - 4i)\alpha - 2 + 12i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - \alpha^2 - 5i\alpha^2 - 7\alpha - 4i\alpha - 2 + 12i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 + i(-5\alpha^2 - 4\alpha + 12) = 0$

يكافئ $\begin{cases} (1) \ldots\ldots \alpha^3 - \alpha^2 - 7\alpha - 2 = 0 \\ (2) \ldots\ldots -5\alpha^2 - 4\alpha + 12 = 0 \end{cases}$

لنحل المعادلة (2) : $\Delta = 16 + 240 = 256 = (16)^2$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{4 - 16}{-10} = \dfrac{-12}{-10} = \dfrac{6}{5} \\ \alpha_2 = \dfrac{4 + 16}{-10} = \dfrac{20}{-10} = -2 \end{cases}$$

هل $\alpha = 6/5$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 7\left(\frac{6}{5}\right) - 2 = \frac{216 - 180 - 1050 - 250}{125} = \frac{-1264}{125}$$

إذن : $\alpha = 6/5$ لا يحقق المعادلة (1) (مرفوض)

هل $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(-2)^3 - (-2)^2 - 7(-2) - 2 = -8 - 4 + 14 - 2 = 0$$

إذن : $\alpha = -2$ يحقق المعادلة (1)

نتيجة : العدد $\alpha = -2$ هو الجذر الحقيقي الوحيد لكثير الحدود p

التمرين ـ 76

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $3i$ ؛ $-3i$ ؛ $2 - 3i$

1 ـ عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -2)\}$

2 ـ عين مجموعة النقط M من المستوي حيث $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$

الحـل ـ 76

1 ـ لاحقة النقطة G هي $\dfrac{1(3i) + 2(-3i) - 2(2 - 3i)}{1 + 2 - 2} = 3i - 6i - 4 + 6i = -4 + 3i$

2 ـ $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$ تكافئ $(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 + 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM})^2 - 2(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM})^2 = 25$

(أنظر الملاحظة) تكافئ $AG^2 + 2BG^2 - 2CG^2 + GM^2 + 2GM^2 - 2GM^2 = 25$

تكافئ $GM^2 = 25 - AG^2 - 2BG^2 + 2CG^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - |-4 + 3i - 3i|^2 - 2|-4 + 3i + 3i|^2 + 2|-4 + 3i - 2 + 3i|^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - |-4|^2 - 2|-4 + 6i|^2 + 2|-6 + 6i|^2$

يكافئ $GM^2 = 25 - 16 - 2(52) + 2(72)$

يكافئ $GM^2 = 49$

يكافئ $GM = 7$

إذن : مجموعة النقط M هي النقط التي تبعد عن G بمسافة 7 أي هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 7

ملاحظة : $2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} + 4\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM} - 4\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{CG}) = \vec{0}$

لأن : G هو مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -2)\}$

التمرين ـ 77

نرفق بكل نقطة $M(x ; y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x' ; y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z' = z^2 - 2(1 + i)z$

1 ـ عبر عن x' و y' بدلالة x و y

2 ـ لتكن (γ) مجموعة النقط M حيث z' عدد حقيقي

برهن أن (γ) هو منحنى لدالة عددية f يطلب عبارتها

الحـل ـ 77

1 ـ $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$

$$z^2 - 2(1+i)\,z = (x + i\,y)^2 - 2(1+i)(x + i\,y)$$
$$= x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i - 2(x + i\,y + i\,x - y)$$
$$= x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i - 2\,x + 2\,y - 2\,i\,x - 2\,i\,y$$
$$= x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y + i(2\,x\,y - 2\,x - 2\,y)$$

نتيجة : $z' = x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y + i(2\,x\,y - 2\,x - 2\,y)$

إذن : $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 2\,x + 2\,y \\ y' = 2\,x\,y - 2\,x - 2\,y \end{cases}$

2 ـ z' حقيقي يكافئ $y' = 0$

يكافئ $2\,x\,y - 2\,x - 2\,y = 0$

يكافئ $x\,y - x - y = 0$

يكافئ $y(x - 1) - x = 0$

يكافئ $y(x - 1) = x$

يكافئ $y = \dfrac{x}{x-1}$ مع $x \neq 1$

نتيجة : (γ) هو منحنى الدالة f المعرفة على $R - \{1\}$ بـ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

التمرين ـ 78

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نضع $\alpha = z - 2\,\bar{z} + 2 + 3\,i$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z

1 ـ أحسب بدلالة x و y الجزء التخيلي و الجزء الحقيقي لـ α

2 ـ حل في C المعادلة $\alpha = 0$ ذات المجهول z

الحـل ـ 78

1 ـ
$$\alpha = z - 2\,\bar{z} + 2 + 3\,i$$
$$= x + i\,y - 2(x - i\,y) + 2 + 3\,i$$
$$= x + i\,y - 2\,x + 2\,i\,y + 2 + 3\,i$$
$$= 2 - x + i(3\,y + 3)$$

منه : $Re(\alpha) = 2 - x$ و $Im(\alpha) = 3\,y + 3$

2 ـ $\alpha = 0$ يكافئ $Re(\alpha) = 0$ و $Im(\alpha) = 0$

يكافئ $2 - x = 0$ و $3\,y + 3 = 0$

يكافئ $x = 2$ و $y = -1$

يكافئ $z = 2 - i$

إذن : المعادلة $\alpha = 0$ تقبل حلا وحيدا هو $z = 2 - i$

التمرين ـ 79

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + i\,y$

نضع $\alpha = i\,z + \bar{z} - 3 - 2\,i$

1 ـ أحسب $\alpha - \bar{\alpha}$ بدلالة x و y

2 ـ برهن أن : النقطة ذات اللاحقة α تنتمي إلى محور الفواصل تكافئ النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

الحـل ـ 79

1 ـ
$$\alpha = i(x + i\,y) + x - i\,y - 3 - 2\,i$$
$$= i\,x - y + x - i\,y - 3 - 2\,i$$
$$= (x - y - 3) + i(x - y - 2)$$

إذن : $\bar{\alpha} = (x - y - 3) - i(x - y - 2)$

منه : $\alpha - \bar{\alpha} = 2\,i(x - y - 2)$

2 ـ النقطة ذات اللاحقة α تنتمي إلى محور الفواصل يكافئ $\alpha \in R$

يكافئ $\alpha = \overline{\alpha}$

يكافئ $\alpha - \overline{\alpha} = 0$

يكافئ $2i(x - y - 2) = 0$

يكافئ $x - y - 2 = 0$

يكافئ $y = x - 2$

يكافئ النقطة ذات اللاحقة z تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

التمرين ــ 80

z عدد مركب يكتب على شكله الجبري $z = x + iy$

نضع $\alpha = 2\overline{z} - 2 + 6i$

1 ــ أكتب α على شكله الجبري .

2 ــ هل يوجد عدد مركب z يحقق $\alpha = z$ ؟

الحل ــ 80

1 ــ
$$\alpha = 2(x - iy) - 2 + 6i$$
$$= 2x - 2iy - 2 + 6i$$
$$= (2x - 2) + i(6 - 2y)$$ شكل جبري لـ α

2 ــ $\alpha = z$ يكافئ $(2x - 2) + i(6 - 2y) = x + iy$

يكافئ $\begin{cases} 2x - 2 = x \\ 6 - 2y = y \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

يكافئ $z = 2 + 2i$

إذن : المعادلة $\alpha = z$ تقبل حلا وحيدا هو $z = 2 + 2i$

التمرين ــ 81

في المستوي المركب M نقطة لاحقتها العدد المركب z حيث $z = x + iy$ (x ، y عددان حقيقيان)

نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq 1$ العدد المركب L المعرف بـ $L = \dfrac{5z - 2}{z - 1}$

1 ــ أكتب $L + \overline{L}$ بدلالة z و $\overline{z}$

2 ــ برهن أن : L عدد تخيلي صرف يكافئ M نقطة من دائرة بإستثناء نقطة

الحل ــ 81

1 ــ
$$L + \overline{L} = \frac{5z - 2}{z - 1} + \frac{5\overline{z} - 2}{\overline{z} - 1}$$
$$= \frac{5z\overline{z} - 5z - 2\overline{z} + 2 + 5z\overline{z} - 5\overline{z} - 2z + 2}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}$$
$$= \frac{10z\overline{z} - 7z - 7\overline{z} + 4}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}$$

نتيجة :
$$L + \overline{L} = \frac{10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4}{z\overline{z} - (z + \overline{z}) + 1}$$

2 ــ L عدد تخيلي صرف يكافئ $L = -\overline{L}$

يكافئ $L + \overline{L} = 0$

يكافئ $\dfrac{10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4}{z\overline{z} - (z + \overline{z}) + 1} = 0$

يكافئ $\begin{cases} 10z\overline{z} - 7(z + \overline{z}) + 4 = 0 \\ z \neq 1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 10(x^2 + y^2) - 7(2x) + 4 = 0 \\ (x ; y) \neq (1 ; 0) \end{cases}$ لأن $z\overline{z} = |z|^2$ و $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-\frac{14}{10}x+\frac{4}{10}=0 \\ (x\,;y)\neq(1\,;0)\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0 \\ (x\,;y)\neq(1\,;0)\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} (x-\frac{7}{10})^2-\frac{49}{100}+y^2+\frac{2}{5}=0 \\ (x\,;y)\neq(1\,;0)\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} (x-\frac{7}{10})^2+y^2=\frac{9}{100} \\ (x\,;y)\neq(1\,;0)\end{array}\right\}$$ يكافئ

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $w(7/10\,;0)$ و نصف القطر $R=\sqrt{\frac{9}{100}}=\frac{3}{10}$
باستثناء النقطة $A(1\,;0)$ لأن $z\neq 1$

التمرين ــ 82

حل في C المعادلة $z=2\bar{z}-2+6i$

الحــل ــ 82

ليكن $z=x+iy$ على شكله الجبري

$z=2\bar{z}-2+6i$ يكافئ $x+iy=2(x-iy)-2+6i$

يكافئ $x+iy=2x-2iy-2+6i$

يكافئ $x+iy-2x+2iy+2-6i=0$

يكافئ $(-x+2)+i(3y-6)=0$

$$\left.\begin{array}{r} -x+2=0 \\ 3y-6=0\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=2\end{array}\right\}$$ يكافئ

يكافئ $z=2+2i$ و هو الحل الوحيد للمعادلة .

التمرين ــ 83

حل في C المعادلات التالية :

1 ــ $|z|^2+\bar{z}^2=8-4i$

2 ــ $z\bar{z}-5\bar{z}-5(1+3i)=0$

الحــل ــ 83

ليكن $z=x+iy$ على شكله الجبري

إذن : $|z|^2=x^2+y^2$ و $z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$

1 ــ $|z|^2+\bar{z}^2=8-4i$ يكافئ $x^2+y^2+(x-iy)^2=8-4i$

يكافئ $x^2+y^2+x^2-2xyi-y^2=8-4i$

يكافئ $2x^2-2xyi=8-4i$

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2=8 \\ 2xy=4\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} x^2=4 \\ y=\frac{4}{2x}\end{array}\right\}$$ يكافئ

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \text{ أو } x=-2 \\ y=2/x\end{array}\right\}$$ يكافئ

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x = 2 \text{ و } y = 1 \\ \text{أو} \\ x = -2 \text{ و } y = -1 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} z = 2 + i \\ \text{أو} \\ z = -2 - i \end{array}\right\}$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{2 + i ; -2 - i\}$

2 ـ $z\bar{z} - 5\bar{z} - 5(1 + 3i) = 0$ يكافئ $x^2 + y^2 - 5(x - iy) = 5(1 + 3i)$

يكافئ $x^2 + y^2 - 5x + 5iy = 5 + 15i$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5x = 5 \\ 5y = 15 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 + 9 - 5x - 5 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} (x - 4)(x - 1) = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x \in \{1 ; 4\} \\ y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \text{ و } y = 3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \text{ و } y = 3 \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} z = 1 + 3i \\ \text{أو} \\ z = 4 + 3i \end{array}\right\}$

نتيجة : المعادلة تقبل حلين هما : $\{1 + 3i ; 4 + 3i\}$

التمرين ـ 84

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^3 - (2 - 3i)z^2 + 9z - 18 + 27i$

1 ـ أكتب $\overline{p(z)}$ بدلالة $\bar{z}$

2 ـ عين العدد المركب α الذي يحقق $p(\alpha) = 0$ و $p(\bar{\alpha}) = 0$ ثم إستنتج حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C

الحـل ـ 84

1 ـ
$$\overline{p(z)} = \bar{z}^3 - \overline{(2 - 3i)}\,\bar{z}^2 + 9\bar{z} - 18 + \overline{27i}$$
$$= \bar{z}^3 - (2 + 3i)\bar{z}^2 + 9\bar{z} - 18 - 27i$$

2 ـ ليكن α عدد مركب .

$\left.\begin{array}{l} p(\alpha) = 0 \\ p(\bar{\alpha}) = 0 \end{array}\right\}$ يكافئ $\left.\begin{array}{l} \alpha^3 - (2 - 3i)\alpha^2 + 9\alpha - 18 + 27i = 0 \quad (1) \\ \bar{\alpha}^3 - (2 - 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 + 27i = 0 \quad (2) \end{array}\right\}$

لكن إذا كان $p(\alpha) = 0$ فإن $\overline{p(\alpha)} = 0$

إذن : $\bar{\alpha}^3 - (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 9\bar{\alpha} - 18 - 27i = 0 \quad (3)$

بطرح (3) من (2) نحصل على : $-(2 - 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i + (2 + 3i)\bar{\alpha}^2 + 27i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2(-2 + 3i + 2 + 3i) + 54i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2(6i) + 54i = 0$

أي : $\bar{\alpha}^2 = \dfrac{-54i}{6i}$

أي : $\overline{\alpha}^2 = -9$

أي : $\overline{\alpha} = 3i$ أو $\overline{\alpha} = -3i$

أي : $\alpha = -3i$ أو $\alpha = 3i$

هل $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1) ؟

$$(3i)^3 - (2-3i)(3i)^2 + 9(3i) - 18 + 27i = -27i + 18 - 27i + 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = 3i$ يحقق المعادلة (1)

هل $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

$$(-3i)^3 - (2-3i)(-3i)^2 + 9(-3i) - 18 + 27i = 27i + 18 - 27i - 27i - 18 + 27i = 0$$

إذن : $\alpha = -3i$ يحقق المعادلة (1)

نتيجة : العدد المركب α الذي يحقق $p(\overline{\alpha}) = p(\alpha) = 0$ هو $\alpha = 3i$ أو $\alpha = -3i$

إستنتاج الحلول :

لدينا : $p(3i) = 0$ و $p(-3i) = 0$

إذن : $p(z)$ يحلل إلى : $(z-3i)(z+3i)(z-\beta)$ حيث $\beta \in C$

أي : $p(z) = (z-3i)(z+3i)(z-\beta)$

أي $p(z) = (z^2+9)(z-\beta)$

منه : $z - \beta = \dfrac{p(z)}{z^2+9}$

يمكن أن نبحث عن $(z-\beta)$ إما بالقسمة الاقليدية أو المطابقة .

نستعمل القسمة الاقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{l|l} z^3 - (2-3i)z^2 + 9z - 18 + 27i & z^2+9 \\ \hline z^3 + \quad 0 \quad + 9z & z - (2-3i) \\ \hline 0 - (2-3i)z^2 + \quad 0 \quad - 18 + 27i & \\ \quad -(2-3i)z^2 \qquad - 18 + 27i & \\ \hline \quad 0 \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

نتيجة : $p(z) = (z^2+9)[z-(2-3i)]$

إذن : $p(z) = 0$ يكافئ $\left\{ \begin{array}{l} z^2 + 9 = 0 \\ \text{أو} \\ z - (2-3i) = 0 \end{array} \right.$

يكافئ $\left\{ \begin{array}{l} z = 3i \text{ أو } z = -3i \\ \text{أو } z = 2-3i \end{array} \right.$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي : $\{3i ; -3i ; 2-3i\}$

التمرين ــ 85

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 - نضع $T = \dfrac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$

نضع $z = x + iy$ و $T = X + iY$ الشكل المركب لـ z و T)

1 ــ أحسب كل من X و Y بدلالة x و y

2 ــ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T حقيقيا .

3 ــ عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون T تخيليا صرفا .

الحـل ــ 85

1 ــ ليكن $(x ; y) \neq (-1 ; 0)$

$$T = \frac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$$

$$= \frac{2+x-iy}{1+x-iy} \times \frac{1+x+iy}{1+x+iy}$$

$$= \frac{(2+x)(1+x) + (2+x)yi - (1+x)yi + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{2 + 2x + x + x^2 + y^2 + i\,y(2 + x - 1 - x)}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2} + \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}\,i$$

إذن : $X = \dfrac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2}$ و $Y = \dfrac{y}{(1+x)^2 + y^2}$

2 ـ T حقيقي يكافئ $Y = 0$

يكافئ $\dfrac{y}{(1+x)^2 + y^2} = 0$

يكافئ $y = 0$

إذن : مجموعة النقط M حتى يكون T حقيقي هي المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ ماعدا النقطة $w(-1\,;0)$

3 ـ T تخيلي صرف يكافئ $X = 0$

يكافئ $\dfrac{x^2 + y^2 + 3x + 2}{(1+x)^2 + y^2} = 0$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0 \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 0 \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{array}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{array}{l} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x\,;y) \neq (-1\,;0) \end{array}\right\}$

إذن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها $w\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$ و نصف قطرها $R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ماعدا النقطة ذات الاحداثيات $(-1\,;0)$

التمرين ـ 86

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $i\sqrt{2}$ ؛ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1 ـ عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;-3)\,;(b\,;1+\sqrt{6})\,;C(1-\sqrt{6})\}$

2 ـ بين أن G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

الحـل ـ 86

1 ـ

$$z_G = \frac{-3(i\sqrt{2}) + (1+\sqrt{6})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-\sqrt{6})\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-3 + 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2}i}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + i\sqrt{18}}{-1}$$

$$= \frac{-3i\sqrt{2} + 1 + 3i\sqrt{2}}{-1}$$

$$= -1$$

منه : احداثيات النقطة G هي $G(-1\,;0)$

2 ـ

$$\|\overrightarrow{GA}\| = |i\sqrt{2} - (-1)| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1)\right| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\|\overrightarrow{GC}\| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - (-1)\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

إذن : A ، B ، C هي نقط من الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{3}$

منه : G هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين ــ 87

u و v عددان مركبان غير حقيقيان . نضع $z = \dfrac{u - \bar{u}v}{1 - v}$

برهن أن z حقيقي يكافئ $|v| = 1$

الحـل ــ 87

z حقيقي يكافئ $z = \bar{z}$

يكافئ $\overline{\left(\dfrac{u - \bar{u}v}{1 - v}\right)} = \dfrac{u - \bar{u}v}{1 - v}$

يكافئ $\dfrac{\bar{u} - u\bar{v}}{1 - \bar{v}} = \dfrac{u - \bar{u}v}{1 - v}$

يكافئ $(\bar{u} - u\bar{v})(1 - v) = (1 - \bar{v})(u - \bar{u}v)$

يكافئ $\bar{u} - \bar{u}v - u\bar{v} + uv\bar{v} = u - \bar{u}v - u\bar{v} + \bar{u}\bar{v}v$

يكافئ $\bar{u} + uv\bar{v} = u + \bar{u}\bar{v}v$

يكافئ $\bar{u} + uv\bar{v} - u - \bar{u}\bar{v}v = 0$

يكافئ $u(v\bar{v} - 1) - \bar{u}(v\bar{v} - 1) = 0$

يكافئ $(v\bar{v} - 1)(u - \bar{u}) = 0$

يكافئ $v\bar{v} - 1 = 0$ لأن $u - \bar{u} \neq 0$ (u ليس حقيقي)

يكافئ $|v|^2 - 1 = 0$ لأن $v\bar{v} = |v|^2$

يكافئ $|v|^2 = 1$

يكافئ $|v| = 1$

التمرين ــ 88

a و b عددان مركبان حيث $|a| = |b| = 1$ **و** $ab \neq -1$

نضع $z = \dfrac{a + b}{1 + ab}$

عبر عن $\bar{z}$ **بدلالة a و b ثم استنتج أن z حقيقي**

الحـل ــ 88

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{a + b}{1 + ab}\right)} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a}\bar{b}}$$

لكن $\left.\begin{array}{l} a\bar{a} = |a|^2 = 1 \\ b\bar{b} = |b|^2 = 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \bar{a} = \dfrac{1}{a} \\ \bar{b} = \dfrac{1}{b} \end{array}\right\}$

منه : $\bar{z} = \dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}{1 + \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b}} = \dfrac{a + b}{ab} \times \dfrac{ab}{1 + ab} = \dfrac{a + b}{1 + ab}$

نتيجة : $\bar{z} = z$ إذن : $z \in R$

التمرين ــ 89

α عدد مركب غير معدوم طريلته R و عمدته θ

نعتبر العددين المركبين $z = \alpha i$ ، $t = \alpha^2$

1 ــ أحسب بدلالة R و θ طويلة ثم عمدة كل من z و t

2 ــ حدد قيم R و θ حتى يكون z و t مترافقين .

الحـل ــ 89

1 ــ $z = \alpha i$ إذن : $\left.\begin{array}{l} |z| = |\alpha| \times |i| = R \\ \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(\alpha) + \mathrm{Arg}(i) = \theta + \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$

$t = \alpha^2$ إذن : $\left.\begin{array}{l} |t| = |\alpha|^2 = R^2 \\ \text{Arg}(t) = 2\,\text{Arg}(\alpha) = 2\,\theta \end{array}\right\}$

يكون z و t مترافقين إذا و فقط إذا كان $\left.\begin{array}{l} R^2 = R \\ 2\,\theta = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + 2\,\pi\,k \end{array}\right\}$ حيث $k \in Z$

أي $\left.\begin{array}{l} R(R-1) = 0 \\ 2\,\theta = -\,\theta - \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} R - 1 = 0 \\ 3\,\theta = -\,\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k \end{array}\right\}$ لأن $R \neq 0$ (α غير معدوم)

أي $\left.\begin{array}{l} R = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + 2\,\frac{\pi}{3}\,k \end{array}\right\}$ حيث $k \in Z$

إذن : قيم R و θ هي كمايلي : $R = 1$ و $\theta = \frac{-\pi}{6} + 2\,\frac{\pi}{3}\,k$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 90

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1 = 1$ ؛ $z_2 = 2\,i$ ؛ $z_3 = -1 - i$

1 ــ أحسب $|z_2 - z_1|$ و $|z_3 - z_1|$

2 ــ أحسب $\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$

3 ــ إستنتج طبيعة المثلث ABC

الحل ــ 90

1 ــ لدينا : $z_2 - z_1 = 2\,i - 1$ ؛ $z_3 - z_1 = -1 - i - 1 = -2 - i$

إذن : $|z_2 - z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ و $|z_3 - z_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

2 ــ
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-1 + 2\,i}{-2 - i} \times \frac{-2 + i}{-2 + i}$$
$$= \frac{2 - i - 4\,i - 2}{4 + 1}$$
$$= -\,i$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن : $\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\,\frac{\pi}{2}$

3 ــ $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$ إذن : $AB = AC$

$\text{Arg}\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = -\,\frac{\pi}{2}$ إذن : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

نتيجة : المثلث ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

التمرين ــ 91

في كل حالة من الحالات التالية أثبت أن العدد z حقيقي .

1 ــ $z = (-2 - 2\,i)^{8n}$ 3 ــ $z = (3 - i\sqrt{3})^{12n}$

2 ــ $z = (-1 + i\sqrt{3})^{3n}$

ملاحظة : n عدد طبيعي .

الحل ــ 91

1 ــ
$$-2 - 2\,i = -2(1 + i)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

منه : $(-2-2i)^{8n} = (-2\sqrt{2})^{8n} \times \left[\cos 8n\frac{\pi}{4} + i\sin 8n\frac{\pi}{4}\right]$

$= (2\sqrt{2})^{8n} \times [\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n]$

إذن : $= (2\sqrt{2})^{8n}$ $z \in R$

2 ـ $-1 + i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 2\left[\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right]$

إذن : $(-1 + i\sqrt{3})^{3n} = 2^{3n} \times \left[\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right]^{3n}$

$= 2^{3n}\left[\cos\left(2\frac{\pi}{3} \times 3n\right) + i\sin\left(2\frac{\pi}{3} \times 3n\right)\right]$

$= 8^n \times [\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n]$

إذن : $= 8^n$ $z \in R$

3 ـ $3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

إذن : $(3 - i\sqrt{3})^{12n} = (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{12n}$

$= (2\sqrt{3})^{12n} \times \left[\cos\left(-\frac{12n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{12n\pi}{6}\right)\right]$

$= (2\sqrt{3})^{12n} \times [\cos(-2\pi n) + i\sin(-2\pi n)]$

إذن : $= (2\sqrt{3})^{12n}$ $z \in R$

التمرين ـ 92

z عدد مركب حيث $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $z^{6n+1} = z$

الحل ـ 92

$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

منه : $z^{6n+1} = z \times z^{6n}$

$= z \times \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{6n}$

$= z \times \left[\cos\frac{6\pi n}{3} + i\sin\frac{6\pi n}{3}\right]$

$= z(\cos 2\pi n + i\sin 2\pi n)$

$= z$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ـ 1

لتكن في C المعادلة $z^2 - \alpha(\alpha + i)\, z + i\,\alpha^3 = 0$ .....(1) ذات المجهول z حيث α عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ .

1 ـ حل في C المعادلة (1)

2 ـ أحسب طويلة و عمدة حلي المعادلة (1) بدلالة R و θ

3 ـ حدد قيم R و θ حتى يكون الحلان مترافقان .

الحـل ـ 1

1 ـ

$$\begin{aligned}\Delta &= \alpha^2(\alpha + i)^2 - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\,\alpha\, i - 1) - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^4 + 2\,i\,\alpha^3 - \alpha^2 - 4\,i\,\alpha^3\\ &= \alpha^4 - 2\,i\,\alpha^3 - \alpha^2\\ &= \alpha^2(\alpha^2 - 2\,i\,\alpha - 1)\\ &= \alpha^2(\alpha - i)^2\\ &= [\alpha(\alpha - i)]^2\end{aligned}$$

منه حلول المعادلة (1) هي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha(\alpha + i) - \alpha(\alpha - i)}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha + i - \alpha + i)}{2} = \dfrac{2\,i\,\alpha}{2} = i\,\alpha \\ z_2 = \dfrac{\alpha(\alpha + i) + \alpha(\alpha - i)}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha + i + \alpha - i)}{2} = \dfrac{2\,\alpha^2}{2} = \alpha^2 \end{cases}$$

2 ـ

$$\begin{cases} |z_1| = |\alpha| = R \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{Arg}(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + \theta \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} |z_2| = |\alpha^2| = |\alpha|^2 = R^2 \\ \mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(\alpha^2) = 2\,\mathrm{Arg}(\alpha) = 2\,\theta \end{cases}$$

3 ـ الحلان مترافقان يكافئ

$$\begin{cases} R^2 = R \\ 2\,\theta = -\dfrac{\pi}{2} - \theta + 2\,\pi\,k \end{cases} \quad \text{حيث } k \in Z$$

يكافئ

$$\begin{cases} R(R - 1) = 0 \\ 3\,\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2\,\pi\,k \end{cases}$$

يكافئ

$$\begin{cases} R = 1 \quad \text{لأن } R \neq 0 \quad (\alpha \text{ غير معدوم}) \\ \theta = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\,\pi}{3}\,k \quad \text{مع } k \in Z \end{cases}$$

التمرين ـ 2

لتكن في C المعادلة $\alpha\, z^2 + (1 - i\,\alpha^2)\, z - i\,\alpha = 0$ .....(1) ذات المجهول المركب z و α عدد مركب غير معدوم

1 ـ أنشر العبارة $(1 + i\,\alpha^2)^2$ ثم حل في C المعادلة (1)

2 ـ ليكن $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$. أحسب طويلة و عمدة حلي المعادلة (1)

الحـل ـ 2

1 ـ

$$(1 + i\,\alpha^2)^2 = 1 + 2\,i\,\alpha^2 - \alpha^4$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 - i\,\alpha^2)^2 + 4\,i\,\alpha^2\\ &= 1 - 2\,i\,\alpha^2 - \alpha^4 + 4\,i\,\alpha^2\end{aligned}$$

$$= 1 + 2\,i\,\alpha^2 - \alpha^4$$

حسب السؤال السابق $= (1 + i\,\alpha^2)^2$

إذن :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 + i\,\alpha^2 - 1 - i\,\alpha^2}{2\,\alpha} = \dfrac{-2}{2\,\alpha} = \dfrac{-1}{\alpha} \\ z_2 = \dfrac{-1 + i\,\alpha^2 + 1 + i\,\alpha^2}{2\,\alpha} = \dfrac{2\,i\,\alpha^2}{2\,\alpha} = i\,\alpha \end{cases}$$

2 ـ

$$\begin{cases} |z_1| = \left|\dfrac{-1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|} \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{-1}{\alpha}\right) = \mathrm{Arg}(-1) - \mathrm{Arg}(\alpha) = \pi - \mathrm{Arg}(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z_2| = |i\,\alpha| = |\alpha| \\ \mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(i) + \mathrm{Arg}(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{Arg}(\alpha) \end{cases}$$

من أجل $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ فإن :

$$\begin{cases} |\alpha| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right] = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right] \end{cases}$$

نتيجة :

$$\left.\begin{matrix} |\alpha| = \sqrt{2} \\ \mathrm{Arg}(\alpha) = \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}\right\} \text{ منه } \left.\begin{matrix} |z_1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } \mathrm{Arg}(z_1) = \pi - \dfrac{\pi}{6} \\ |z_2| = \sqrt{2} \text{ و } \mathrm{Arg}(z_2) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}\right\}$$

التمرين ـ 3

R عدد حقيقي موجب تماما . و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب غير معدوم طويلته R و عمدته θ

1 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^2 - \alpha\,z + \alpha^2 = 0$ ذات المجهول z

2 ـ عبر بدلالة R و θ عن طويلة و عمدة كل من الحلين .

الحـل ـ 3

1 ـ

$$\Delta = \alpha^2 - 4\,\alpha^2 = -3\,\alpha^2 = (i\,\alpha\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\alpha - i\,\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}(1 - i\sqrt{3}) \\ z_2 = \dfrac{\alpha + i\,\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha}{2}(1 + i\sqrt{3}) \end{cases}$$

2 ـ

$$|z_1| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| \times |1 - i\sqrt{3}| = \frac{R}{2}\sqrt{1+3} = R$$

$$|z_2| = \left|\frac{\alpha}{2}\right| \times |1 + i\sqrt{3}| = \frac{R}{2}\sqrt{1+3} = R$$

$$\mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(\alpha) + \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + \mathrm{Arg}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \theta - \frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{Arg}(z_2) = \mathrm{Arg}(\alpha) + \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta + \mathrm{Arg}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \theta + \frac{\pi}{3}$$

التمرين ـ 4

θ عدد حقيقي .

لتكن المعادلة $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)\,z + \dfrac{i}{2}\sin 2\theta = 0$ .....(1) ذات المجهول المركب z

1 ـ عين حلول المعادلة (1) بدلالة θ

2 ـ عين حلول المعادلة (1) من أجل $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

الحـل ـ 4

1 ـ

$$\Delta = (1 + i\sin 2\theta)^2 - 4\left(\frac{i}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= 1 + 2\,i \sin 2\theta - \sin^2 2\theta - 2\,i \sin 2\theta$$
$$= 1 - \sin^2 2\theta$$
$$= \cos^2 2\theta$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 + i\sin 2\theta - \cos 2\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} + \dfrac{i}{2}\sin 2\theta \\ z_2 = \dfrac{1 + i\sin 2\theta + \cos 2\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} + \dfrac{i}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

2 ــ من أجل $\theta = \frac{\pi}{4}$ لدينا : $\left.\begin{array}{l} \cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right\}$

منه :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$$

التمرين ــ 5

حل في مجموعة الأعداد المركبة C كلا من المعادلتين : $z^2 - 2z + 5 = 0$ .....(1)

و $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$ .....(2)

لتكن النقط A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$

1 ــ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

2 ــ أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

3 ــ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C)

الحـل ــ 5

1 ــ $z^2 - 2z + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \\ z_2 = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

$z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$: $\Delta = 4(1+\sqrt{3})^2 - 4(5 + 2\sqrt{3})$

$$= 4 + 8\sqrt{3} + 12 - 20 - 8\sqrt{3}$$
$$= -4$$
$$= (2i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{3}) - 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} - i \\ z_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{3}) + 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} + i \end{cases}$$

2 ــ لنحسب AB^2 ؛ AC^2 ؛ BC^2 كمايلي :

$$AB^2 = |1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i|^2 = |\sqrt{3} - i|^2 = 3 + 1 = 4$$
$$AC^2 = |1 - 2i - 1 - 2i|^2 = |-4i|^2 = 16$$
$$BC^2 = |1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i|^2 = |-\sqrt{3} - 3i|^2 = 3 + 9 = 12$$

نتيجة : $AB^2 + BC^2 = AC^2$ إذن : حسب فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

3 ــ نعلم أن في المثلث القائم مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هي منتصف الوتر في هذه الحالة هي منتصف [AC]

و نصف قطرها هو نصف طول الوتر أي $\frac{AC}{2}$ و في هذه الحالة $\frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$

لنبحث إذن عن المركز : $\dfrac{1 + 2i + 1 - 2i}{2} = 1$

إذن : المركز هو $w(1\,;\,0)$

منه : معادلة الدائرة (C) : $(x-1)^2 + y^2 = (2)^2$

أي : $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

4 ــ هل إحداثيات النقطة D تحقق معادلة الدائرة (C) ؟

لدينا $D(1+\sqrt{3} ; -1)$

إذن : $(1+\sqrt{3})^2 + (-1)^2 - 2(1+\sqrt{3}) - 3 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2 - 2\sqrt{3} - 3$

$= 0$ إذن : فعلا D تنتمي إلى الدائرة (C)

التمرين ــ 6

θ عدد حقيقي

1 ــ حل في C المعادلة $z^2 - 2z\sin\theta + 1 = 0$ ..... (1) ذات المجهول z

لتكن A و B لاحقتاهما حلول المعادلة (1) . و لتكن O مبدأ المعلم

2 ــ عين قيم العدد الحقيقي θ حيث يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع

الحـل ــ 6

1 ــ $\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = -4(1-\sin^2\theta) = -4\cos^2\theta = (2i\cos\theta)^2$

$$z_1 = \frac{2\sin\theta - 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta - i\cos\theta$$

$$z_2 = \frac{2\sin\theta + 2i\cos\theta}{2} = \sin\theta + i\cos\theta$$

2 ــ يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $OA^2 = OB^2 = AB^2$

لتكن A ، B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 إذن :

$$OA^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$OB^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$AB^2 = |z_2 - z_1|^2$$

$$= |2i\cos\theta|^2$$

$$= 4\cos^2\theta$$

نتيجة : يكون ABC مثلث متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $AB = 1$

أي : $4\cos^2\theta = 1$

أي $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

أي $\cos\theta = \frac{1}{2}$ أو $\cos\theta = \frac{-1}{2}$

أي $\theta = \frac{\pi}{3} + \pi k$ أو $\theta = \frac{-\pi}{3} + \pi k$ حيث $k \in Z$

التمرين ــ 7

لتكن في C المعادلة $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$ .....(1)

1 ــ تحقق أن 2 هو حل للمعادلة (1)

2 ــ عين العددين المركبين a و b حيث : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + az + b)$

3 ــ حل في C المعادلة (1)

الحـل ــ 7

1 ــ $(2)^3 + 2(2)^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$

إذن : فعلا 2 هو حل للمعادلة (1)

2 ــ للبحث عن a و b يمكن استعمال المطابقة أو القسمة الاقليدية كمايلي :

$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + az + b)$ إذن : $z^2 + az + b = \frac{z^3 + 2z^2 - 16}{z-2}$

$$\begin{array}{r|l} z^3 + 2z^2 - 16 & z - 2 \\ \cline{2-2} \underline{z^3 - 2z^2} & z^2 + 4z + 8 \\ 4z^2 - 16 & \\ \underline{4z^2 - 8z} & \\ 8z - 16 & \\ \underline{8z - 16} & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $a = 4$ و $b = 8$

أي : $z^3 + 2z^2 - 16 = (z - 2)(z^2 + 4z + 8)$

3 ـ المعادلة (1) تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} z = 2 \\ \text{أو} \\ (2) \ldots\ldots z^2 + 4z + 8 = 0 \end{array} \right.$

لنحل المعادلة (2) في C : $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-4 - 4i}{2} = -2 - 2i \\ z_2 = \dfrac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (1) هي $\{2 ; -2 - 2i ; -2 + 2i\}$

التمرين ـ 8

1 ـ حل في C المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$

2 ـ استنتج حلول المعادلة $z^3 - 1 = 0$ في C

3 ـ نضع $u = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

أ) أحسب u^2 ؛ u^3 ؛ u^{2008}

ب) أحسب $S = u + u^2 + u^3 + \ldots\ldots + u^{2008}$

الحل ـ 8

1 ـ $z^2 + z + 1 = 0$: $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2 ـ $z^3 - 1 = 0$ تكافئ $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

تكافئ $\left\{ \begin{array}{l} z - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 + z + 1 = 0 \end{array} \right.$

إذن : حلول المعادلة $z^3 - 1 = 0$ هي $\left\{1 ; -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

3 ـ أ) $u = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(2\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\dfrac{\pi}{3}\right)$

إذن : $u^2 = \left(\cos 2\dfrac{\pi}{3} + i\sin 2\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = \cos 4\dfrac{\pi}{3} + i\sin 4\dfrac{\pi}{3} = \bar{u}$ حيث $\bar{u}$ هو مرافق u

$$u^3 = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$u^{2008} = \left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^{2008} = \cos 4016\frac{\pi}{3} + i\sin 4016\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3} = u$$

ب) ليكن n عدد طبيعي نميز الحالات التالية :

$u^n = u^{3k} = (u^3)^k = 1^k = 1$ منه $n = 3k$

$u^n = u^{3k+1} = u^{3k} \times u = u$ منه $n = 3k + 1$

$u^n = u^{3k+2} = u^{3k} \times u^2 = \bar{u}$ منه $n = 3k + 2$

نتيجة :

$$S = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + \ldots + u^{2005} + u^{2006} + u^{2007} + u^{2008}$$
$$= (u + \bar{u} + 1) + (u + \bar{u} + 1) + \ldots + (u + \bar{u} + 1) + u$$
$$= \frac{2007}{3}(u + \bar{u} + 1) + u$$
$$= 669(u + \bar{u} + 1) + u$$
$$= 669\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + u$$
$$= 669(0) + u$$
$$= u$$
$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

التمرين ــ 9

p كثير حدود للمتغير المركب z معرف بـ $p(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1 ــ عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

2 ــ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

الحـل ــ 9

1 ــ $(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a) = z^4 + 4z^3 + 2az^2 + az^3 + 4az^2 + 2a^2z + bz^2 + 4bz + 2ba$

$$= z^4 + z^3(4 + a) + z^2(6a + b) + z(2a^2 + 4b) + 2ab$$

بالمطابقة مع عبارة p(z) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} 4 + a &= 0 \\ 6a + b &= -19 \\ 2a^2 + 4b &= 52 \\ 2ab &= -40 \end{aligned}\right\}$$

أي

$$\left.\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= -19 - 6a \\ b &= \frac{52 - 2a^2}{4} \\ b &= \frac{-40}{2a} \end{aligned}\right\}$$

أي

$$\left.\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= -19 + 24 \\ b &= \frac{52 - 32}{4} \\ b &= \frac{-40}{-8} \end{aligned}\right\}$$

أي

$$\left.\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 5 \\ b &= 5 \\ b &= 5 \end{aligned}\right\}$$

أي

$$\left.\begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 5 \end{aligned}\right\}$$

نتيجة : $p(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$

2 ـ $p(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} (\alpha) \ldots\ldots z^2 - 4z + 5 = 0 \\ \text{أو} \\ (\beta) \ldots\ldots z^2 + 4z - 8 = 0 \end{cases}$

حل المعادلة (α) : $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4 - 2i}{2} = 2 - i \\ z_2 = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i \end{cases}$$

حل المعادلة (β) : $\Delta = 16 + 32 = 48 = (4\sqrt{3})^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-4 + 4\sqrt{3}}{2} = -2 + 2\sqrt{3} \\ z_2 = \dfrac{-4 - 4\sqrt{3}}{2} = -2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ في C هي : $\{-2 - 2\sqrt{3} ; -2 + 2\sqrt{3} ; 2 - i ; 2 + i\}$

التمرين ـ 10

1 ـ حل في C المعادلة $z^4 - 1 = 0$

2 ـ استنتج حلول المعادلة $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ في C

الحـل ـ 10

1 ـ $z^4 - 1 = 0$ يكافئ $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$

يكافئ $\begin{cases} z^2 - 1 = 0 \\ \text{أو } z^2 + 1 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z = 1 \text{ أو } z = -1 \\ \text{أو } z = i \text{ أو } z = -i \end{cases}$

إذن : حلول المعادلة $z^4 - 1 = 0$ هي $\{1 ; -1 ; i ; -i\}$

2 ـ نضع $t = \dfrac{2z+1}{z-1}$ مع $z \neq 1$

إذن : المعادلة $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ تكافئ $t^4 - 1 = 0$

تكافئ $t = 1$ أو $t = -1$ أو $t = i$ أو $t = -i$

الحالة (1) $t = 1$ إذن : $\dfrac{2z+1}{z-1} = 1$

أي : $2z + 1 = z - 1$

أي : $z = -2$

الحالة (2) $t = -1$ إذن : $\dfrac{2z+1}{z-1} = -1$

أي $2z + 1 = -z + 1$

أي $3z = 0$

أي $z = 0$

الحالة (3) $t = i$ إذن : $\dfrac{2z+1}{z-1} = i$

أي : $2z + 1 = iz - i$

أي $z(2 - i) = -1 - i$

أي $z = \dfrac{-1 - i}{2 - i}$

أي $z = \frac{-1-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$

أي $z = \frac{-2-i-2i+1}{4+1}$

أي $z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

الحالة $t = -i$ (4) أي $\frac{2z+1}{z-1} = -i$ ،

أي : $2z+1 = -iz+i$

أي $z(2+i) = -1+i$

أي $z = \frac{-1+i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$

أي $z = \frac{-2+i+2i+1}{4+1}$

أي $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

خلاصة : حلول المعادلة $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ هي $\left\{-2 ; 0 ; \frac{-1}{5} - \frac{3}{5}i ; \frac{-1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$

التمرين ــ 11

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1 ــ α عدد حقيقي . عبر بدلالة α عن الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد $p(i\alpha)$

2 ــ عين قيم α حتى يكون $p(i\alpha) = 0$

3 ــ عين عددين حقيقيين b و c حتى يكون من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z^2+9)(z^2+bz+c)$

4 ــ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

الحل ــ 11

1 ــ
$$p(i\alpha) = (i\alpha)^4 - 10(i\alpha)^3 + 38(i\alpha)^2 - 90(i\alpha) + 261$$
$$= \alpha^4 + 10i\alpha^3 - 38\alpha^2 - 90i\alpha + 261$$
$$= \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 + i(10\alpha^3 - 90\alpha)$$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} Re[p(i\alpha)] = \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 \\ Im[p(i\alpha)] = 10\alpha^3 - 90\alpha \end{array}\right.$

2 ــ $p(i\alpha) = 0$ يكافئ $\left\{\begin{array}{l} \alpha^4 - 38\alpha^2 + 261 = 0 \quad ..... (1) \\ 10\alpha^3 - 90\alpha = 0 \quad ..... (2) \end{array}\right.$

نحل المعادلة (2) : $10\alpha^3 - 90\alpha = 0$ تكافئ $10\alpha(\alpha^2 - 9) = 0$

تكافئ $\alpha \in \{0 ; 3 ; -3\}$

هل $\alpha = 0$ حل للمعادلة (1) ؟ $0 - 0 + 261 \neq 0$ إذن : $\alpha = 0$ مرفوض

هل $\alpha = 3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = 3$ مقبول

هل $\alpha = -3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 342 + 261 = 0$ إذن : $\alpha = -3$ مقبول

خلاصة : $p(i\alpha) = 0$ تكافئ $\alpha = 3$ أو $\alpha = -3$

3 ــ $p(z) = (z^2+9)(z^2+bz+c)$ يكافئ $z^2 + bz + c = \frac{p(z)}{z^2+9}$

لنجري القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{l|l}
z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261 & z^2 + 9 \\ \cline{2-2}
z^4 \qquad\quad + 9z^2 & z^2 - 10z + 29 \\ \cline{1-1}
0 - 10z^3 + 29z^2 - 90z + 261 & \\
-10z^3 \qquad\quad - 90z & \\ \cline{1-1}
0 + 29z^2 + 0 + 261 & \\
29z^2 \qquad + 261 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

نتيجة : $z^2 + b z + c = z^2 - 10 z + 29$

أي $b = -10$ ؛ $c = 29$

$p(z) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z^2 + 9 = 0 \\ \text{أو} \\ z^2 - 10 z + 29 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} z \in \{3 i ; -3 i\} \\ \text{أو} \quad z^2 - 10 z + 29 = 0 \end{cases}$

لنحل المعادلة $z^2 - 10 z + 29 = 0$: $\Delta = 100 - 116 = -16 = (4 i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{10 - 4 i}{2} = 5 - 2 i \\ z_2 = \dfrac{10 + 4 i}{2} = 5 + 2 i \end{cases}$$

خلاصة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{3 i ; -3 i ; 5 - 2 i ; 5 + 2 i\}$

التمرين ــ 12

1 ــ أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $1 - i$

2 ــ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z = \dfrac{(-1 - 3 i) z + 3 + i}{z - 1}$ حيث z_0 هو الحل الذي له أصغر طويلة .

3 ــ أحسب العدد $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$ و أكتبه على شكله الجبري .

4 ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ حقيقيا

الحــل ــ 12

1 ــ $1 - i = \sqrt{2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

2 ــ $z = \dfrac{(-1 - 3 i) z + 3 + i}{z - 1}$ يكافئ $z^2 - z = (-1 - 3 i) z + 3 + i$ مع $z \neq 1$

يكافئ $z^2 + 3 i z - 3 - i = 0$ مع $z \neq 1$

$\Delta = -9 - 4(-3 - i) = -9 + 12 + 4 i = 3 + 4 i = (2 + i)^2$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-3 i - 2 - i}{2} = -1 - 2 i \\ z_2 = \dfrac{-3 i + 2 + i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

$|z_1| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ ؛ $|z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$|z_1| > |z_2|$ إذن : $z_0 = z_2 = 1 - i$

3 ــ حسب السؤال (1) : $z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

إذن : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$

$= \cos 2008\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin 2008\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos(-502 \pi) + i \sin(-502 \pi)$

$= 1$

4 ــ $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n} = \cos\left(-n \dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-n \dfrac{\pi}{4}\right)$

إذن : يكون $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2}$ حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\sin\left(-n \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

أي $n = 4 k$ مع $k \in N$

التمرين ــ 13

من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 2i$ نعتبر العدد المركب $L(z)$ المعرف بـــ : $L(z) = \dfrac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz+2}$

1 ــ أوجد الأعداد المركبة z حيث $L(z) = z$ ثم أكتبها على شكلها المثلثي

2 ــ لتكن M نقطة لاحقتها z

عين مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون $L(z)$ عددا تخيليا صرفا

الحـــل ــ 13

ليكن $z \neq 2i$

1 ــ $L(z) = z$ تكافئ $\dfrac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz+2} = z$

تكافئ $z(iz+2) = (5-i)z + 2(1+i)$

تكافئ $iz^2 + 2z - (5-i)z - 2 - 2i = 0$

تكافئ $iz^2 + z(2-5+i) - 2 - 2i = 0$

تكافئ $iz^2 + (-3+i)z - 2 - 2i = 0$

$$\Delta = (-3+i)^2 - 4i(-2-2i)$$
$$= 9 - 6i - 1 + 8i - 8$$
$$= 2i$$
$$= (1+i)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{3-i-1-i}{2i} = \dfrac{1-i}{i} = \dfrac{1-i}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -1-i \\ z_2 = \dfrac{3-i+1+i}{2i} = \dfrac{4}{2i} = \dfrac{2}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = -2i \end{cases}$$

نتيجة : الأعداد المركبة z التي تحقق $L(z) = z$ هي $\{-1-i\,;\,-2i\}$

الشكل المثلثي :

$$-1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$-2i = 2\left[\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

2 ــ ليكن $z = x + iy$ حيث $(x\,;y) \neq (0\,;2)$ لأن $z \neq 2i$

$$L(z) = \frac{(5-i)(x+iy) + 2(1+i)}{i(x+iy)+2}$$
$$= \frac{5x + 5iy - ix + y + 2 + 2i}{ix - y + 2}$$
$$= \frac{(5x+y+2) + (5y-x+2)i}{2-y+ix} \times \frac{2-y-ix}{2-y-ix}$$
$$= \frac{(5x+y+2)(2-y) - x(5x+y+2)i + (5y-x+2)(2-y)i + x(5y-x+2)}{(2-y)^2 + x^2}$$
$$= \frac{(5x+y+2)(2-y) + x(5y-x+2)}{(2-y)^2+x^2} + \frac{(5y-x+2)(2-y) - x(5x+y+2)}{(2-y)^2+x^2}\,i$$

نتيجة : يكون $L(z)$ تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (5x+y+2)(2-y) + x(5y-x+2) = 0 \;\ldots\ldots\; (1) \\ L(z) \neq 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

الشرط (1) يكافئ $10x - 5xy + 2y - y^2 + 4 - 2y + 5xy - x^2 + 2x = 0$

يكافئ $-y^2 - x^2 + 12x + 4 = 0$

يكافئ $x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0$

يكافئ $(x-6)^2 + y^2 - 36 - 4 = 0$

يكافئ $(x-6)^2 + y^2 = 40$ هي معادلة الدائرة (C) التي مركزها النقطة $w(6\,;0)$

و نصف قطرها $\sqrt{40}$

الشرط (2) يكافئ $(5-i)z+2(1+i)\neq 0$

لنحل المعادلة $(5-i)z+2(1+i)=0$

$$z=\frac{-2-2i}{5-i}\times\frac{5+i}{5+i}$$
$$=\frac{-10-2i-10i+2}{25+1}$$
$$=\frac{-8-12i}{26}$$
$$=\frac{-4}{13}-\frac{6}{13}i$$

إذن : الشرط (2) يكافئ $z\neq\frac{-4}{13}-\frac{6}{13}i$

هل النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{-4}{13};\frac{-6}{13}\right)$ تنتمي إلى الدائرة C ؟

$$\left(-\frac{4}{13}-6\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2=\left(\frac{82}{13}\right)^2+\left(\frac{6}{13}\right)^2=\frac{6760}{169}=40$$

إذن : فعلا النقطة $A\left(\frac{-4}{13};\frac{-6}{13}\right)$ تنتمي إلى الدائرة (C)

خلاصة : يكون $L(z)$ تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كانت M نقطة من الدائرة (C) ذات المركز $w(6;0)$ و نصف القطر $\sqrt{40}$ باستثناء النقطتين $B(0;2)$ و $W\left(\frac{-4}{13};\frac{-6}{13}\right)$

التمرين ــ 14

p كثير حدود للمتغير المركب z حيث $p(z)=z^3-iz^2+(1-i)z-2+2i$

1 ــ أحسب $p(1)$ ثم استنتج كثير الحدود $Q(z)$ حيث $p(z)=(z-1)Q(z)$ من أجل كل عدد مركب z

2 ــ حل في C المعادلة $p(z)=0$

3 ــ لتكن A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها حلول المعادلة $p(z)=0$

ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحـــل ــ 14

1 ــ $p(1)=1-i+1-i-2+2i=2-2i-2+2i=0$

$p(z)=(z-1)Q(z)$ إذن : $Q(z)=\frac{p(z)}{z-1}$ حيث $z\neq 1$

لنجري القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{l|l}
z^3-iz^2+(1-i)z-2+2i & z-1 \\ \cline{2-2}
\underline{z^3-z^2} & z^2+(1-i)z+2(1-i) \\
(1-i)z^2+(1-i)z-2+2i & \\
\underline{(1-i)z^2-(1-i)z} & \\
2(1-i)z-2+2i & \\
\underline{2(1-i)z-2+2i} & \\
0 &
\end{array}$$

إذن : $Q(z)=z^2+(1-\ )z+2(1-i)$

2 ــ $p(z)=0$ تكافئ $\begin{cases} z-1=0 \\ \text{أو } z^2+(1-i)z+2(1-i)=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} z=1 \\ \text{أو } z^2+(1-i)z+2-2i=0 \quad (2)\ldots \end{cases}$

نحل المعادلة (2) في C :

$$\Delta=(1-i)^2-4(2-2i)$$
$$=1-2i-1-8+8i$$
$$=-8+6i$$

$= (1 + 3i)^2$

ملاحظة : للبحث عن الجذر التربيعي لـ $-8 + 6i$ نضع $(\alpha + \beta i)^2 = -8 + 6i$

إذن :
$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-8 + \sqrt{64 + 36}}{2}} = \sqrt{\dfrac{-8 + 10}{2}} = 1 \\ \beta = \dfrac{6}{2\alpha} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

منه : $-8 + 6i = (1 + 3i)^2$

إذن :
$$z_1 = \frac{-1 + i - 1 - 3i}{2} = -1 - i$$
$$z_2 = \frac{-1 + i + 1 + 3i}{2} = 2i$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{1 ; 2i ; -1-i\}$

3 ـ لتكن A ، B ، C لواحقها على الترتيب : 1 ؛ $2i$ ؛ $-1-i$

$$AB^2 = |2i - 1|^2 = 4 + 1 = 5$$
$$AC^2 = |-1 - i - 1|^2 = |-2 - i|^2 = 4 + 1 = 5$$
$$BC^2 = |-1 - i - 2i|^2 = |-1 - 3i|^2 = 1 + 9 = 10$$

نتيجة : $AB^2 = AC^2$ إذن : ABC مثلث متساوي الساقين

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في A

خلاصة : ABC قائم و متساوي الساقين

التمرين ـ 15

p كثير حدود للمتغير المركب z معرف كمايلي : $p(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i$

1 ـ تحقق أن $p(2 + i) = 0$ **ثم عين كثير الحدود** $Q(z)$ **حيث** $p(z) = (z - 2 - i)Q(z)$

2 ـ حل في C المعادلة $p(z) = 0$

3 ـ لتكن A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها حلول المعادلة $p(z) = 0$ **حيث** $2 + i$ **هي لاحقة النقطة A**

عين احداثيات النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD

الحل ـ 15

1 ـ
$$p(2 + i) = (2 + i)^3 - (4 + i)(2 + i)^2 + (5 + 4i)(2 + i) - 5i$$
$$= 2 + 11i - 8 - 19i + 10 + 5i + 8i - 4 - 5i$$
$$= 0$$

$p(z) = (z - 2 - i)Q(z)$ إذن : $Q(z) = \dfrac{p(z)}{z - 2 - i}$

لنجري القسمة الاقليدية :

$$\begin{array}{r|l} z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 4i)z - 5i & z - 2 - i \\ \underline{z^3 - (2 + i)z^2} & \overline{z^2 - 2z + 1 + 2i} \\ -2z^2 + (5 + 4i)z - 5i & \\ \underline{-2z^2 + (4 + 2i)z} & \\ (1 + 2i)z - 5i & \\ \underline{(1 + 2i)z - 5i} & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $Q(z) = z^2 - 2z + 1 + 2i$

2 ـ $p(z) = 0$ تكافئ $\begin{cases} z - 2 - i = 0 \\ \text{أو } z^2 - 2z + 1 + 2i = 0 \quad (\alpha) \end{cases}$

نحل المعادلة (α) : $\Delta = 4 - 4(1 + 2i) = -8i = (2 - 2i)^2$

إذن :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2 - 2 + 2i}{2} = i \\ z_2 = \dfrac{2 + 2 - 2i}{2} = 2 - i \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة $p(z) = 0$ هي $\{2 + i ; i ; 2 - i\}$

لتكن z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب .

إذن : A هي مرجع الجملة $\{(B ; 1) ; (C ; 1) ; (D ; 1)\}$

منه : $\frac{z_B + z_C + z_D}{3} = z_A$ أي $z_B + z_C + z_D = 3 z_A$

إذن : $z_D = 3 z_A - z_B - z_C$

أي : $z_D = 3(2 + i) - i - (2 - i) = 6 + 3 i - i - 2 + i = 4 + 3i$

نتيجة : احداثيات النقطة D هي $D(4 ; 3)$

التمرين ــ 16

لتكن في C المعادلة $z^3 - (6 + i) z^2 + (13 + i) z - 10 + 2 i = 0$ ..... (E)

1 ــ أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه

2 ــ حل في C المعادلة (F) و ليكن z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2

3 ــ عين احداثيي النقطة G مرجح الجملة $\{(A ; -2) ; (B ; 3) ; (C ; 1)\}$

4 ــ عين المجموعة E_M من نقط المستوي حيث $-2 MA^2 + 3 MB^2 + MC^2 = 9$

الحــل ــ 16

1 ــ ليكن $\alpha \in R$

α حل للمعادلة (E) يكافئ $\alpha^3 - (6 + i) \alpha^2 + (13 + i) \alpha - 10 + 2 i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - 6 \alpha^2 - i \alpha^2 + 13 \alpha + i \alpha - 10 + 2 i = 0$

يكافئ $\alpha^3 - 6 \alpha^2 + 13 \alpha - 10 - i(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0$

يكافئ $\begin{cases} (1) \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \\ (2) \ldots\ldots \alpha^3 - 6 \alpha^2 + 13 \alpha - 10 = 0 \end{cases}$

نحل المعادلة (1) : $\Delta = 1 + 8 = 9$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1 - 3}{2} = -1 \\ \alpha_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2 \end{cases}$$

هل $\alpha = -1$ حل للمعادلة (2) ؟ $-1 - 6 - 13 - 10 = -30$

إذن : $\alpha = -1$ مرفوض

هل $\alpha = 2$ حل للمعادلة (2) ؟ $8 - 24 + 26 - 10 = 34 - 34 = 0$

نتيجة : $\alpha = 2$ حل للمعادلة (E) إذن $z_0 = 2$

2 ــ

$$\begin{array}{l|l} z^3 - (6 + i) z^2 + (13 + i) z - 10 + 2 i & z - 2 \\ \hline \underline{z^3 - 2 z^2} & z^2 + (-4 - i) z + 5 - i \\ (-4 - i) z^2 + (13 + i) z - 10 + 2 i & \\ \underline{(-4 - i) z^2 + (8 + 2 i) z} & \\ (5 - i) z - 10 + 2 i & \\ \underline{(5 - i) z - 10 + 2 i} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $\begin{cases} z = 2 \\ \text{أو} \\ (1) \ldots\ldots z^2 + (-4 - i) z + 5 - i = 0 \end{cases}$

لنحل في C المعادلة (1) :

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 + 8 i - 1 - 4(5 - i) \\ &= 15 + 8 i - 20 + 4 i \\ &= -5 + 12 i \\ &= (\alpha + \beta i)^2 \end{aligned}$$

إذن : $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{25+144}}{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = 2 \\ \beta = \dfrac{12}{2\alpha} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases}$

نتيجة : $-5 + 12i = (2+3i)^2$

منه : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{4+i-2-3i}{2} = 1-i \\ z_2 = \dfrac{4+i+2+3i}{2} = 3+2i \end{cases}$

نتيجة : حلول المعادلة (E) هي $z_0 = 2$ ؛ $z_1 = 1-i$ ؛ $z_2 = 3+2i$

3 ــ لتكن z لاحقة النقطة G إذن :

$$z = \frac{-2(2)+3(1-i)+3+2i}{-2+3+1} = \frac{-4+3-3i+3+2i}{2} = 1-\frac{1}{2}i$$

منه : $G\left(1 ; -\frac{1}{2}\right)$

4 ــ $-2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 9$ يكافئ $-2GA^2 + 3GB^2 + GC^2 + 2MG^2 = 9$

يكافئ $MG^2 = \dfrac{9 + 2GA^2 - 3GB^2 - GC^2}{2}$

$$GA^2 = \left|1-\frac{1}{2}i-2\right|^2 = \left|-1-\frac{1}{2}i\right|^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$GB^2 = \left|1-\frac{1}{2}i-1+i\right|^2 = \left|\frac{1}{2}i\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$$GC^2 = \left|1-\frac{1}{2}i-3-2i\right|^2 = \left|-2-\frac{5}{2}i\right|^2 = 4+\frac{25}{4} = \frac{41}{4}$$

نتيجة :

$$MG^2 = \frac{9+2\left(\frac{5}{4}\right)-3\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{41}{4}}{2}$$

أي $MG^2 = \dfrac{36+10-3-41}{8}$

أي $MG^2 = \dfrac{1}{4}$

أي $MG = \dfrac{1}{2}$

إذن : مجموعة النقط E_M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1/2

التمرين ــ 17

ليكن $a = 3+i\sqrt{3}$ ؛ $b = 2+\sqrt{3}+3i$

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب a ؛ $\bar{a}$ ؛ b حيث $\bar{a}$ هو مرافق a

1 ــ بين أن المثلث AOB متقايس الأضلاع (O هي مبدأ المعلم)

2 ــ عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث AOB

ليكن α و β عددين مركبين و T التحويل النقطي للمستوي الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = \alpha z + \beta$

3 ــ عين α و β حتى يكون $T(O) = G$ و $T(A) = C$

4 ــ بين أن T دوران يطلب مركزه و زاويته

الحل ــ 17

1 ــ

$$OA^2 = |3+i\sqrt{3}|^2 = 9+3 = 12$$

$$OB^2 = |3-i\sqrt{3}|^2 = 9+3 = 12$$

$$AB^2 = |3-i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}|^2 = |-2i\sqrt{3}|^2 = 12$$

نتيجة : $OA = OB = AB$ إذن : OAB مثلث متقايس الأضلاع .

2 ـ $z_G = \dfrac{3 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} + 0}{3} = 2$

إذن : $G(2 ; 0)$ هي مركز ثقل المثلث OAB

3 ـ $\begin{cases} T(O) = G \\ T(A) = C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(0) + \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) + \beta = 2 + \sqrt{3} + 3i \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha(3 + i\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 3i \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} \times \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{9 + 3} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{6\sqrt{3} + 6i}{12} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{cases}$

نتيجة : عبارة التحويل (T) هي : $z' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z + 2$

4 ـ $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\left.\begin{array}{l} |\alpha| = 1 \\ \mathrm{Arg}(\alpha) = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right\}$ إذن : (T) هو دوران زاويته $\dfrac{\pi}{6}$ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{2}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)}$

التمرين ـ 18

A و B نقطتان من المستوي لواحقها على الترتيب $4 + 2i$ و $3 - i$

1 ـ ما هي طبيعة المثلث OAB ؟ (O هو مبدأ المعلم)

2 ـ عين مركز و زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B و B إلى O

3 ـ لتكن C صورة O بالدوران R . ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$

الحل ـ 18

1 ـ $AO^2 = |4 + 2i|^2 = 16 + 4 = 20$

$BO^2 = |3 - i|^2 = 9 + 1 = 10$

$AB^2 = |3 - i - 4 - 2i|^2 = |-1 - 3i|^2 = 1 + 9 = 10$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} BO = AB \\ BO^2 + AB^2 = AO^2 \end{array}\right\}$ إذن : المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في B

2 ـ ليكن $z' = \alpha z + \beta$ عبارة الدوران R حيث α و β عددين مركبين و $|\alpha| = 1$

$\begin{cases} R(A) = B \\ R(B) = O \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \alpha(4 + 2i) + \beta = 3 - i \ \ldots\ldots\ (1) \\ \alpha(3 - i) + \beta = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $\alpha(4 + 2i - 3 + i) = 3 - i$

أي $\alpha = \frac{3-i}{1+3i}$

أي $\alpha = \frac{3-i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i}$

أي $\alpha = \frac{3-9i-i-3}{10}$

أي $\alpha = -i$ مقبول لأن $|-i| = 1$

بالتعويض في (2) : $\beta = -\alpha(3-i) = i(3-i) = 1+3$.

نتيجة : عبارة الدوران R هي $z' = -iz + 1 + 3i$

النقطة الصامدة : $\frac{1+3i}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i+3}{2} = 2+i$

زاوية الدوران : $-i = 1\left[\cos 3\frac{\pi}{2} + i\sin 3\frac{\pi}{2}\right]$

إذن : $\text{Arg}(\alpha) = 3\frac{\pi}{2}$

خلاصة : R دوران مركزه $w(2;1)$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$

3 ــ لنبحث عن لاحقة النقطة C :

$T(0) = C$ إذن : لاحقة C هي $-i(0) + 1 + 3i = 1 + 3i$

نتيجة : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4-1\\2-3\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ إذن : الرباعي ABOC متوازي أضلاع

بما أن $AB = BO$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BO}$ فإن ABOC مربع

التمرين ــ 19

لتكن A و B نقطتان من المستوي لاحقتهما على الترتيب $3-2i$ و $-1+6i$
w نقطة من حامل محور الفراصل . R الدوران الذي مركزه w و يحول A إلى B
عين احداثيي المركز w و زاوية الدوران R

الحـل ــ 19

لتكن $w(x;0)$ حيث $x \in R$

$R(A) = B$ إذن : $WA = WB$

منه : $WA^2 = WB^2$

أي : $|3-2i-x|^2 = |-1+6i-x|^2$

أي : $(3-x)^2 + 4 = (1+x)^2 + 36$

أي : $9 - 6x + x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2 + 36$

أي : $-6x + 13 = 2x + 37$

أي $x = -3$

نتيجة : مركز الدوران R هو $w(-3;0)$

لتكن θ زاوية الدوران إذن : $\theta = (\overrightarrow{WA};\overrightarrow{WB})$

$= \text{Arg}(-1+6i+3) - \text{Arg}(3-2i+3)$

$= \text{Arg}\left(\frac{2+6i}{6-2i}\right)$

$= \text{Arg}\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)$

$= \text{Arg}\left(\frac{1+3i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}\right)$

$$= \text{Arg}\left(\frac{3+i+9i-3}{9+1}\right)$$

$$= \text{Arg}(i)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

خلاصة : R دوران مركزه $w(-3 ; 0)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

التمرين ــ 20

A ، B ، C ، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $2i$ ؛ 6 ؛ $1+i$ ؛ $3-3i$

α و β عددان مركبان و T التحويل النقطي للمستوي عبارته المركبة $z' = 3\alpha z + \beta$

عين α و β علما أن $T(A) = B$ و $T(C) = D$

الحـل ــ 20

1 ــ $\begin{cases} T(A) = B \\ T(C) = D \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3\alpha(2i) + \beta = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3\alpha(1+i) + \beta = 3 - 3i \ldots (2) \end{cases}$

نطرح (2) من (1) : $3\alpha(2i - 1 - i) = 6 - 3 + 3i$

أي $3\alpha(-1+i) = 3(1+i)$

أي $\alpha = \frac{1+i}{-1+i}$

أي $\alpha = \frac{1+i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i}$

أي $\alpha = \frac{-1-i-i+1}{2}$

أي $\alpha = -i$

بالتعويض في (1) نحصل على :

$$\beta = 6 - 3\alpha(2i)$$
$$= 6 - 3(-i)(2i)$$
$$= 6 - 6$$
$$= 0$$

خلاصة : عبارة التحويل T هي : $z' = -3iz$

التمرين ــ 21

$A(2 ; 1)$ ؛ $B(3 ; 0)$ نقطتان من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

H هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

R هو الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{-\pi}{4}$

T هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BO}$

1 ــ أكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات H ؛ R ؛ T

2 ــ أكتب العبارة المركبة للتحويل ToRoH

3 ــ عين النقطة C حيث $(ToRoH)(C) = O$ (O هي مبدأ المعلم)

الحـل ــ 21

عبارة H : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{4}z + \beta$ حيث $2 + i = \frac{\beta}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4}}$ (المركز هو A)

منه : $\beta = (2+i)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

أي : $\beta = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$

نتيجة : $z' = -\frac{\sqrt{2}}{4}z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$ عبارة H

عبارة R : $z' = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1 - \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} = 3$ (المركز)

منه : $\beta = 3\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right]$

أي $\beta = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$

نتيجة : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) z + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$ عبارة R

عبارة T : $z' = z - 3$ عبارة T

2 ــ ليكن z عدد مركب .

$$RoH(z) = R[H(z)]$$

$$= R\left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right]$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left[\frac{-\sqrt{2}}{4} z + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) z + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-2}{8}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) i - 2i - \frac{\sqrt{2}}{2} i + 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right] + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right) + 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

إذن : $ToRoH(z) = T\left[-\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)\right]$

$$= -\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{15}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{3}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

و هي العبارة المركبة لـ ToRoH

3 ــ لتكن z لاحقة النقطة C

$ToRoH(C) = O$ يكافئ $ToRoH(z) = 0$

يكافئ $-\frac{1}{4}(1 - i) z + \frac{3}{4} + i\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right) = 0$

يكافئ $\frac{1}{4}\left[-(1 - i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1)\right] = 0$

يكافئ $-(1 - i) z + 3 + i(4\sqrt{2} - 1) = 0$

يكافئ $z = \frac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1 - i}$

يكافئ $z = \frac{3 + i(4\sqrt{2} - 1)}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i}$

يكافئ $z = \dfrac{3 + 3i + i(4\sqrt{2} - 1) - 4\sqrt{2} + 1}{2}$

يكافئ $z = \dfrac{4 - 4\sqrt{2} + i(4\sqrt{2} + 2)}{2}$

يكافئ $z = 2 - 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} + 1)$

نتيجة : احداثيي النقطة C هما $C(2 - 2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2} + 1)$

التمرين ــ 22

1 ــ حل في C المعادلة $z^2 - (2 + i)z + 3 + i = 0$ و ليكن z_0 و z_1 حلولها حيث $|z_0| > |z_1|$

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 1 ؛ z_0 ؛ z_1

2 ــ عين احداثيي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C

3 ــ T التحويل النقطي للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

أ) بين أن $\overrightarrow{GM'} = -2\,\overrightarrow{GM}$

ب) إستنتج طبيعة التحويل T و عناصره المميزة .

ج) أكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 ــ A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل T

بين أن النقط A' ، B' ، C' على استقامية

الحـل ــ 22

1 ــ $z^2 - (2 + i)z + 3 + i = 0$:

$$\Delta = 4 + 4i - 1 - 12 - 4i = -9 = (3i)^2$$

$$\begin{cases} z' = \dfrac{2 + i - 3i}{2} = 1 - i \\ z'' = \dfrac{2 + i + 3i}{2} = 1 + 2i \end{cases}$$

$|z_0| > |z_1|$ إذن $\left\{ \begin{array}{l} z_0 = 1 + 2i \\ z_1 = 1 - i \end{array} \right.$

2 ــ لتكن z لاحقة النقطة G إذن : $z = \dfrac{1 + 1 + 2i + 1 - i}{3} = 1 + \dfrac{1}{3}i$

منه : $G(1 ; 1/3)$

3 ــ أ)

$$\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{GM} + 3\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GM} - 3\,\overrightarrow{GM} = -2\,\overrightarrow{GM}$$

لأن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$

ب) $\overrightarrow{GM'} = -2\,\overrightarrow{GM}$ إذن : M' هي صورة M بالتحاكي الذي مركزه $G(1 ; 1/3)$ و نسبته -2

ج) T تحاكي نسبته -2 و مركزه G إذن : عبارته $z' = -2z + \beta$ حيث

$\dfrac{\beta}{1 + 2} = 1 + \dfrac{1}{3}i$ منه $\beta = 3\left(1 + \dfrac{1}{3}i\right) = 3 + i$

نتيجة : عبارة التحاكي T هي : $z' = -2z + 3 + i$

4 ــ لدينا النقط A ، B ، C على استقامة واحدة لأن لها نفس الفاصلة إذن فهي تنتمي إلى مستقيم (Δ)

و لكن صورة (Δ) بالتحاكي (T) هو مستقيم يشمل A' ، B' ، C' إذن : A' ، B' ، C' على استقامة واحدة .

التمرين ــ 23

A ، B ، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_A = 2 + 2i$ ؛ $z_B = 5 + 5i$ ؛ $z_C = -2 - 2i$

1 ــ أثبت أن العدد $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي

2 ـ استنتج طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول B إلى C و A نقطة صامدة وحيدة بـ T

3 ـ اكتب العبارة المركبة للتحويل T

4 ـ (γ) منحنى معادلته $y = 3x - \frac{1}{x}$. اكتب معادلة (γ') صورة المنحنى (γ) بالتحويل T

الحل ـ 23

1 ـ

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-2i-2-2i}{5+5i-2-2i}$$

$$= \frac{-4-4i}{3+3i}$$

$$= \frac{-4(1+i)}{3(1+i)}$$

$$= \frac{-4}{3}$$ إذن : فعلا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عدد حقيقي

2 ـ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4}{3}$ يكافئ $z_C - z_A = \frac{-4}{3}(z_B - z_A)$

يكافئ $\overrightarrow{AC} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AB}$

بما أن $\left.\begin{array}{l} T(B) = C \\ T(A) = A \end{array}\right\}$ و $\overrightarrow{AC} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AB}$ وحيدة

فإن T هو التحاكي الذي مركزه A و نسبته $\frac{-4}{3}$

3 ـ الشكل المركب لـ T : $z' = \frac{-4}{3}z + \beta$ حيث $\frac{\beta}{1+\frac{4}{3}} = z_A$

منه : $\beta = \frac{7}{3}(2+2i) = \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

إذن : عبارة T هي : $z' = \frac{-4}{3}z + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

4 ـ لنبحث عن الشكل التحليلي للتحاكي (T) :

نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ إذن : $x' + iy' = \frac{-4}{3}(x+iy) + \frac{14}{3} + \frac{14}{3}i$

$$= \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} + i\left(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}y\right)$$

منه $\left.\begin{array}{l} x' = \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} \\ y' = \frac{-4}{3}y + \frac{14}{3} \end{array}\right\}$ العبارة التحليلية للتحاكي T

لنبحث الأن عن x و y بدلالة x' و y' :

$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{-4}{3}x + \frac{14}{3} \\ y' = \frac{-4}{3}y + \frac{14}{3} \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \frac{4}{3}x = -x' + \frac{14}{3} \\ \frac{4}{3}y = -y' + \frac{14}{3} \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} x = \frac{-3}{4}x' + \frac{7}{2} \\ y = \frac{-3}{4}y' + \frac{7}{2} \end{array}\right\}$

صورة (γ) بـ التحاكي T :

$y = 3x - \frac{1}{x}$ يكافئ $-\frac{3}{4}y' + \frac{7}{2} = 3\left(-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{-\frac{3}{4}x' + \frac{7}{2}}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = -\frac{7}{2} - \frac{9}{4}x' + \frac{21}{2} - \frac{4}{-3x' + 14}$

يكافئ $-\frac{3}{4}y' = 7 - \frac{9}{4}x' + \frac{4}{3x' - 14}$

يكافئ $y' = \frac{-28}{3} + 3x' - \frac{16}{9x' - 42}$

إذن : صورة (γ) بالتحويل T هو المنحنى (γ') ذو المعادلة $y = \frac{-28}{3} + 3x - \frac{16}{9x - 42}$

التمرين ــ 24

لتكن المعادلة $(E)\ldots\ldots\ z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

1 ــ بين أن المعادلة (E) تقبل حلين تخيليين صرفا مترافقين z_0 و $\overline{z_0}$ حيث الجزء التخيلي لـ z_0 موجب

2 ــ عين الحلول الأخرى z_1 و z_2 للمعادلة (E) حيث الجزء التخيلي لـ z_1 موجب

3 ــ إستنتج تحويلا نقطيا بسيطا يحول z_0 إلى $\overline{z_0}$ و z_1 إلى z_2

الحـل ــ 24

1 ــ ليكن $\alpha \in R^*$

$(i\alpha)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $(i\alpha)^4 - 4(i\alpha)^3 + 14(i\alpha)^2 - 36i\alpha + 45 = 0$

يكافئ $\alpha^4 + 4i\alpha^3 - 14\alpha^2 - 36i\alpha + 45 = 0$

يكافئ $\alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 + 4i(\alpha^3 - 9\alpha) = 0$

يكافئ $\begin{cases} \alpha^4 - 14\alpha^2 + 45 = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \\ \alpha^3 - 9\alpha = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

حل المعادلة (2) : $\alpha^3 - 9\alpha = 0$ تكافئ $\alpha(\alpha^2 - 9) = 0$

تكافئ $\alpha^2 - 9 = 0$ لأن $\alpha \neq 0$

تكافئ $\alpha \in \{-3 ; 3\}$

هل $\alpha = 3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0$ محقق

هل $\alpha = -3$ حل للمعادلة (1) ؟ $81 - 126 + 45 = 126 - 126 = 0$ محقق

نتيجة : $3i$ و $-3i$ هما حلان للمعادلة (E)

الجزء التخيلي لـ z_0 موجب إذن : $z_0 = 3i$ و $\overline{z_0} = -3i$

2 ــ البحث عن z_1 و z_2 :

المعادلة (E) تكافئ $(z - 3i)(z + 3i)\,Q(z) = 0$ حيث Q كثير حدود من الدرجة (2) للمتغير z نبحث عنه

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 & z^2 + 9 \\ \cline{2-2} z^4 + 0 + 9z^2 & z^2 - 4z + 5 \\ \hline -4z^3 + 5z^2 - 36z + 45 & \\ -4z^3 + 0 - 36z & \\ \hline 5z^2 + 45 & \\ 5z^2 + 45 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $Q(z) = z^2 - 4z + 5$

لنحل المعادلة $Q(z) = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

$\begin{cases} z_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i \\ z_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \end{cases}$ لأن الجزء التخيلي لـ z_1 موجب

3 ــ لدينا $z_2 = \overline{z_1}$ إذن : يكفي أن نأخذ التحويل T ذو العبارة $z' = \overline{z}$ الذي يحول كل عدد مركب إلى مرافقه

إذن $\begin{cases} \overline{z_0} = T(z_0) \\ z_2 = T(z_1) = \overline{z_1} \end{cases}$

و هو التناظر العمودي بالنسبة إلى محور الفواصل .

التمرين ــ 25

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب 1 و 4

(d) هي مجموعة نقط المستقيم (OA) ماعدا النقطة A

(Δ) هو مجموعة نقط المستقيم العمودي على (OA) في النقطة A ماعدا A

(Γ) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 1

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب Z حيث $Z = \frac{z^2}{z-1}$

لتكن m و M نقطتين من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z و Z

الجزء I

لتكن f و g دالتين معرفتين بـ $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ؛ $g(x) = \frac{x^2-1}{x}$

نسمي D_1 و D_2 مجموعتي تعريفي الدالتين f و g على الترتيب

أدرس تغيرات كل من f و g ثم إستنتج $f(D_1)$ و $g(D_2)$

الجزء II

1 ــ حل في C المعادلة $Z = 3$ ذات المجهول z ثم أكتب الحلول على شكلها الأسي

2 ــ نفرض في هذا السؤال أن $z = 1 + e^{i\theta}$ (مع $\theta \in R$)

أحسب Z بدلالة θ ثم إستنتج مجموعة النقط M لما θ يمسح IR

3 ــ نضع $m(x ; y)$ و $M(X ; Y)$

أ) عين مجموعة النقط M لما m تمسح المجموعة (d)

ب) عين مجموعة النقط M لما m تمسح المجموعة (Δ)

4 ــ أحسب X و Y بدلالة x و y . ثم عين مجموعة النقط m عندما M تمسح محور الفواصل

الحل ــ 25

الجزء I :

تغيرات الدالة f : f معرفة على $IR - \{1\}$ إذن : $D_1 = IR - \{1\}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$

$f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$

نتيجة : $f(D_1) =]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$

تغيرات الدالة g : g معرفة على IR^* إذن : $D_2 = IR^*$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{2\,x(x) - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

نتيجة : $g(D_2) = IR$

الجزء II

1 ـ $Z = 3$ يكافئ $\frac{z^2}{z-1} = 3$

يكافئ $z^2 = 3(z-1)$

يكافئ $z^2 - 3z + 3 = 0$

$$\Delta = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

الشكل الأسي لـ z_1 و z_2

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \sqrt{3}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2 ـ $z = 1 + e^{i\theta}$ إذن : $Z = \frac{(1 + e^{i\theta})^2}{1 + e^{i\theta} - 1}$

$$= \frac{1 + 2\,e^{i\theta} + e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}$$

$$= e^{-i\theta} + 2 + e^{i\theta}$$

$$= e^{-i\theta} + 1 + 1 + e^{i\theta}$$

$= \overline{z} + z$ لأن $z = 1 + e^{i\theta}$ و $\overline{z} = 1 + e^{-i\theta}$

$$= 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(1 + e^{i\theta})$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(1 + \cos\theta + i \sin\theta)$$

$$= 2(1 + \cos\theta)$$

منه $M(2(1 + \cos\theta) ; 0)$

لدينا : $-1 \le \cos\theta \le 1$

إذن : $0 \le 1 + \cos\theta \le 2$

منه : $0 \le 2(1 + \cos\theta) \le 4$

إذن : M تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[OB]$ و هي مجموعة النقط M لما θ يمسح IR

3 ـ أ) m تمسح المجموعة (d) إذن : $m(x ; y)$ حيث $x \in IR - \{1\}$

منه $z = x$ حيث $x \in IR - \{1\}$

لدينا $Z = \frac{z^2}{z-1}$ إذن : $Z = \frac{x^2}{x-1}$

إذن : $M\left(\frac{x^2}{x-1} ; 0\right)$

حسب الجزء I فإن لما $x \in IR - \{1\}$ فإن $\frac{x^2}{x-1} \in]-\infty ; 0]\cup[4 ; +\infty[$

إذن : النقطة M تنتمي إلى محور الفواصل ماعدا القطعة المستقيمة [OB]

حيث يمكن لـ M أن تنطبق على O أو B

ب) m تمسح المجموعة (Δ) إذن : $m(1 ; y)$ مع $y \neq 0$

منه : $z = 1 + i y$

إذن : $Z = \frac{(1+iy)^2}{1+iy-1}$

أي $Z = \frac{1-y^2+2iy}{iy}$

أي $Z = \frac{1-y^2+2iy}{iy} \times \frac{-iy}{-iy}$

أي $Z = \frac{-iy(1-y^2)+2y^2}{y^2}$

أي $Z = 2 - \frac{1-y^2}{y} i$

أي $Z = 2 + \frac{y^2-1}{y} i$

نعتبر الدالة h للمتغير الحقيقي y المعرفة على IR* بـ $h(y) = \frac{y^2-1}{y}$

إذن : حسب الجزء I فإن لما $y \in IR^*$ فإن $h(y) \in IR$

إذن : مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z هي نقط المستقيم ذو المعادلة $x = 2$

4 ـ $Z = \frac{z^2}{z-1}$ إذن : $X + iY = \frac{(x+iy)^2}{x+iy-1}$

أي $X + iY = \frac{x^2-y^2+2xyi}{x-1+iy} \times \frac{x-1-iy}{x-1-iy}$

أي $X + iY = \frac{(x-1)(x^2-y^2) - iy(x^2-y^2) + 2xy(x-1)i + y(2xy)}{(x-1)^2+y^2}$

أي $\begin{cases} X = \frac{(x-1)(x^2-y^2)+y(2xy)}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \frac{2xy(x-1)-y(x^2-y^2)}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} X = \frac{x^3-xy^2-x^2+y^2-2xy^2}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \frac{2x^2y-2xy-yx^2+y^3}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$

أي $\begin{cases} X = \frac{x^3-x^2+y^2-3xy^2}{(x-1)^2+y^2} \\ Y = \frac{x^2y+y^3-2xy}{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$

إذن : لما M تمسح محور الفواصل فإن $Y = 0$ منه : $x^2 y + y^3 - 2xy = 0$ مع $(x ; y) \neq (1 ; 0)$

أي $y(x^2 - 2x + y^2) = 0$

أي $y = 0$ أو $x^2 + y^2 - 2x = 0$

أي $y = 0$ أو $(x-1)^2 + y^2 = 1$

إذن : m تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ أو الدائرة التي مركزها $A(1 ; 0)$ و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة A

أي m تنتمي إلى محور الفواصل إتحاد الدائرة (Γ) ماعدا A

التمرين ـ 26

الجزء I

u عدد مركب حيث $u = 1 + i$

1 ـ أكتب u على شكله الأسي

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $S_n = u^n + \bar{u}^n$

2 ـ بين أن $S_n = \lambda_n \cos \frac{n\pi}{4}$ حيث λ_n عدد حقيقي يطلب تعيينه

3 ـ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = 0$

4 ـ أثبت أن إذا كان n عددا زوجيا فإن λ_n يكون عددا صحيحا

الجزء II

ليكن $n = 2m$ حيث $m \in IN^*$

1 ـ باستعمال دستور ثنائي الحدين أنشر العددين $(1+i)^{2m}$ و $(1-i)^{2m}$

2 ـ p عدد طبيعي أكتب على أبسط شكل العبارتين $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ و $i^{2p} + (-i)^{2p}$

3 ـ ليكن $m = 12$ برهن أن $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

الحل ـ 26

الجزء I

1 ـ $1 + i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 ـ
$$S_n = u^n + \bar{u}^n$$
$$= \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n$$
$$= (\sqrt{2})^n e^{i\frac{\pi n}{4}} + (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{\pi n}{4}}$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}}\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[\cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i \sin\frac{n\pi}{4}\right]$$
$$= (\sqrt{2})^n \left[2 \cos n\frac{\pi}{4}\right]$$

إذن : $\lambda_n = 2(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} = 2(\sqrt{2})^n$

3 ـ $S_n = 0$ يكافئ $\cos n\frac{\pi}{4} = 0$

يكافئ $\cos n\frac{\pi}{4} = \cos(2k+1)\frac{\pi}{2}$ حيث $k \in IN^*$ لأن n طبيعي

يكافئ $\frac{n\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

يكافئ $\frac{n}{2} = 2k + 1$

يكافئ $n = 2(2k+1)$ مع $k \in IN^*$

4 ـ n زوجي إذن $n = 2k$ حيث $k \in IN$

منه : $\lambda_n = 2(\sqrt{2})^{2k}$

أي $\lambda_n = 2 \times 2^k$

أي $\lambda_n = 2^{k+1}$

منه : λ_n عدد صحيح

الجزء II

1 ـ $(1+i)^{2m} = C_{2m}^0 i^0 + C_{2m}^1 i^1 + C_{2m}^2 i^2 + \ldots\ldots + C_{2m}^{2m} i^{2m}$

$(1-i)^{2m} = C_{2m}^0 (-i)^0 + C_{2m}^1 (-i)^1 + C_{2m}^2 (-i)^2 + \ldots\ldots + C_{2m}^{2m} (-i)^{2m}$

2 ـ

$$\begin{aligned} i^{2p+1} + (-i)^{2p+1} &= i(i)^{2p} + (-i)(-i)^{2p} \\ &= i(i)^{2p} - i(i)^{2p} \\ &= i(i^{2p} - i^{2p}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i)^{2p} + (-i)^{2p} &= (i^2)^p + [(-i)^2]^p \\ &= (-1)^p + (-1)^p \\ &= 2(-1)^p \end{aligned}$$

3 ـ حسب الجزء I : $u^n + \bar{u}^n = 2(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4}$

إذن : $u^{2m} + \bar{u}^{2m} = 2(\sqrt{2})^{2m} \cos 2m\frac{\pi}{4} = 2(2)^m \cos\frac{m\pi}{2}$

من أجل $m = 12$:

$$\left.\begin{aligned} u^{2m} &= (1+i)^{24} = C_{24}^0 i^0 + C_{24}^1 i^1 + C_{24}^2 i^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{24}^{24} i^{24} \\ \bar{u}^{2m} &= (1-i)^{24} = C_{24}^0 (-i)^0 + C_{24}^1 (-i)^1 + C_{24}^2 (-i)^2 + \ldots\ldots + C_{24}^{24} (-i)^{24} \end{aligned}\right\}$$

منه :

$$\begin{aligned} u^{2m} + \bar{u}^{2m} &= C_{24}^0[i^0 + (-i)^0] + C_{24}^1[i^1 + (-i)^1] + C_{24}^2[i^2 + (-i)^2] + \ldots\ldots + C_{24}^{24}[i^{24} + (-i)^{24}] \\ &= C_{24}^0[2(-1)^0] + 0 + C_{24}^2[2(-1)^1] + 0 + \ldots + C_{24}^{24}[2(-1)^{12}] \\ &= 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}] \end{aligned}$$

إذن : $u^{2\times12} + \bar{u}^{2\times12} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}]$

أي : $2(\sqrt{2})^{2\times12} \cos\frac{2\times12\pi}{4} = 2[C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}]$

أي : $2^{12} = C_{24}^0 - C_{24}^2 + \ldots + C_{24}^{24}$

أي : $\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$

التمرين ـ 27

1 ـ عين العددين الحقيقيين x و y حيث $(x+iy)^2 = 5 - 12i$

2 ـ حل في C المعادلة $iz^2 - (1-2i)z + 2(1+i) = 0$ (E)

3 ـ نسمي z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)

أثبت أن z_1^{2008} و z_2^{2008} حقيقيان

الحـل ـ 27

1 ـ $(x+iy)^2 = 5 - 12i$ إذن :

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2ixy &= 5 - 12i \\ |x+iy|^2 &= |5-12i| \end{aligned}\right\}$$

إذن :

$$\left.\begin{aligned} &(1) \ldots\ldots x^2 - y^2 = 5 \\ &(2) \ldots\ldots\ldots 2xy = -12 \\ &(3) \ldots\ldots x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}\right\}$$

بجمع (1) و (3) $2x^2 = 18$

إذن : $x^2 = 9$

إذن : $x = 3$ أو $x = -3$

ليكن $x = 3$ إذن العلاقة (2) تصبح : $2 \times 3\, y = -12$

منه : $y = -2$

نتيجة : $(3 - 2i)^2 = 5 - 12i$

2 ـ حل المعادلة $i z^2 - (1 - 2i) z + 2(1 + i) = 0$

$$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4i(2 + 2i)$$
$$= 1 - 4i - 4 - 8i + 8$$
$$= 5 - 12i$$
$$= (3 - 2i)^2 \quad \text{حسب السؤال (1)}$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 - 2i - 3 + 2i}{2i} = \dfrac{-1}{i} \times \dfrac{-i}{-i} = i \\ z_2 = \dfrac{1 - 2i + 3 - 2i}{2i} = \dfrac{4 - 4}{2i} \times \dfrac{-2i}{-2i} = -2 - 2i \end{cases}$$

3 ـ

$$z_1^{2003} = i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$
$$z_2^{2008} = [-2(1 + i)]^{2008} = 2^{2008} \times \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$$

إذن :
$$z_2^{2008} = 2^{2008} \times (\sqrt{2})^{2008} \times \left[\cos\frac{2008\pi}{4} + i \sin\frac{2008\pi}{4}\right]$$

منه
$$z_2^{2008} = 2^{2008} \times 2^{1004} \times [\cos 502\pi + i \sin 502\pi]$$

أي
$$z_2^{2008} = 2^{3012}$$

نتيجة : كل من z_1^{2008} و z_2^{2008} عددان حقيقيان

التمرين ـ 28

α عدد مركب غير معدوم

1 ـ أنشر العبارة $[1 - i(1 + \alpha)]^2$

2 ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 + [-1 + i(1 - \alpha)] z + i\alpha + \alpha$ ذات المجهول z

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلول هذه المعادلة حيث z_1 مستقل عن α

3 ـ نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم

أكتب كل من z_1 و z_2 على شكله المثلثي

4 ـ A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z

لتكن E مجموعة النقط M من المستوي حيث $(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2$

تحقق أن المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E ثم عين المجموعة E

الحل ـ 28

1 ـ

$$[1 - i(1 + \alpha)]^2 = 1 - 2i(1 + \alpha) - (1 + \alpha)^2$$
$$= 1 - 2i - 2i\alpha - 1 - 2\alpha - \alpha^2$$
$$= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$$

2 ـ

$$\Delta = [-1 + i(1 - \alpha)]^2 - 4(i\alpha + \alpha)$$
$$= 1 - 2i(1 - \alpha) - (1 - \alpha)^2 - 4i\alpha - 4\alpha$$
$$= 1 - 2i + 2i\alpha - 1 + 2\alpha - \alpha^2 - 4i\alpha - 4\alpha$$
$$= -\alpha^2 - 2\alpha - 2i - 2i\alpha$$
$$= [1 - i(1 + \alpha)]^2 \quad \text{حسب السؤال (1)}$$

إذن :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1 - i(1 - \alpha) - 1 + i(1 + \alpha)}{2} = \dfrac{-i + i\alpha + i + i\alpha}{2} = i\alpha \\ z_2 = \dfrac{1 - i(1 - \alpha) + 1 - i(1 + \alpha)}{2} = \dfrac{2 - i + i\alpha - i - i\alpha}{2} = 1 - i \end{cases}$$

نتيجة : z_1 مستقل عن α إذن $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = i\alpha$

3 ــ ليكن $\alpha = i\,y$ حيث $y \in R^*$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = i\,\alpha = i\,(i\,y) = -\,y$$

نميز حالتين :

الحالة الأولى : $y > 0$ إذن : $-\,y < 0$

منه $z_2 = y[\cos\pi + i\sin\pi]$

الحالة الثانية : $y < 0$ إذن : $-\,y > 0$

منه : $z_2 = -\,y[\cos 2\pi + i\sin 2\pi]$

4 ــ من أجل $z = 0$ لدينا : $(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = z_1 \times \overline{z_1} = |z_1|^2$

إذن : $(0 - z_1)(\overline{0 - z_1}) = |1 - i|^2 = 2$

إذن : فعلا المبدأ 0 ينتمي إلى المجموعة E

لنبحث عن المجموعة (E) :

$$(z - z_1)(\overline{z - z_1}) = 2 \Leftrightarrow |z - z_1|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |z - z_1| = \sqrt{2}$$

إذن : E هي الدائرة التي مركزها النقطة A ذات اللاحقة z_1 و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

(لأن المسافة بين M و A هي $\sqrt{2}$)