الجبر

١٠ الصف العاشر
كتاب المدرس

أُعدَّت هذه السلسلة بناءً على المعايير الوطنية لمناهج التعليم العام ما قبل الجامعي في الجمهورية العربية السورية.

تطرح هذه السلسلة مواقف حياتية، وتؤمِّن فرص تعلّم كثيرة، وتنمّي لدى المتعلّم مهارات التفكير العليا والمهارات الحياتية كما تُعزِّز لديه القيم الاجتماعية والوطنية، وتدعم الروابط المنهجية بين الموادّ الدراسية الأخرى. هذه السلسلة تتمحور حول المتعلّم وتنمية قدراته الذهنية والعملية.

Draft

٢٠١٠ – ٢٠١١م
المؤسسة العامة للطباعة

حقوق التوزيع في الجمهورية العربية السورية
محفوظة للمؤسسة العامة للطباعة

مكتبة أوغاريت
للحصول على المواد التفاعلية للكتاب
www.ugarit.sy
education@ugarit.sy

Draft

مقدمة كتاب المدرس

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب لمدرسي مادة الرياضيات، أن نؤكد أن هذا الكتاب قد تم إعداده ليكون أداة مساعدة، يستنير بها المدرس في تحسين أدائه، وجعل تدريسه عملية وظيفية تستند في المقام الأول إلى أسس تربوية سليمة وفي ضوء نظريات التعلم الحديثة بحيث يكون دور المدرس ميسراً لعملية التعلم لإعداد قادة المستقبل من الشباب في عصر العلم والتقنية، اللّذين أصبحا من ضرورات الحياة للإنسان المعاصر.

ومن هذا المنطلق كان من الضروري؛ بل من المحتم؛ لمدرس الرياضيات فهم فلسفة المقرر الذي يعالجه، والذي وضع في ضوء المناهج المطورة التي تضعها وزارة التربية والتي تهتم بالآتي:

١. تأكيد مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة، من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمي، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق؛ وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات، وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتي، والعمل التعاوني بروح الفريق، والمناقشة والحوار وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية في إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.
٢. تقديم رؤىً شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتقنية والمجتمع (STS)
٣. تعكس دور التقدم العلمي في تنمية المجتمع المحلي، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب للتصرف الواعي والفعال حيال استخدام الأدوات التقنية.
٤. التركيز على تبصير الطلاب بالمفاهيم والمبادئ الرياضية المتعلقة بالأنشطة الحياتية، وتنمية اتجاهات إيجابية للطلاب تجاه الرياضيات ودراستها، لتقدير إيجابياتها كأداة فاعلة في الحياة.
٥. تزويد الطلاب بثقافة شاملة مبنية على رؤية واضحة داخل الإطار البيئي الذي يعيشون فيه، من خلال تنمية الاتجاهات الإيجابية لحسن استخدام الموارد والإمكانات المتاحة.
٦. تنمية وتعميق الانتماء للوطن بإظهار دور الدولة فيما تقدمه من خدمات تعود بالخير والنفع في جميع المناحي الحياتية.

Draft

ماذا عن كتاب الطالب؟

١. يتفق محتوى الكتاب مع جميع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات والأهداف الدراسية المقررة لهذا الصف، ويظهر ما بين محتوى وحداته من ترابط وتكامل.
٢. استهلال كل وحدة من وحدات الكتاب بافتتاحية تحوي:

(أ) تهيئة للتشويق وتكوين دافعية لدى الطالب وذلك لاستقراء محتوى الوحدة وإستكشافه.
(ب) عرضاً لدروس الوحدة.
(ج) مجموعة من الأنشطة المتنوعة، تتضمن أنشطة استكشافية وأخرى لربط الخبرات السابقة للطلاب بموضوعات المقرر.

٣. يبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس.
٤. ينتهي كل درس من كل وحدة بمجموعة من التمارين والتدريبات التي تنتقل من الاستفهام المباشر إلى التفكير المتعمق.
٥. يتضمن محتوى كل وحدة مجموعة من المعالم المتميزة، والمرتبطة ارتباطاً وثيقاً بموضوعات الوحدة تتضمن أنشطة تربوية (تطبيقات حياتية، مسألة للتفكير، دعنا نفكر ونتناقش، عمل تعاوني، تفكير ناقد).
٦. تنتهي كل وحدة باختبار يشتمل على العديد من الأسئلة ويتضمن أسئلة موضوعية بنوعياتها المختلفة، والمقالية بنوعياتها وذات الإجابات القصيرة، كما تمت مراعاة ما طرأ من تحديث وتطوير في مجال بناء الاختبارات التقويمية.
٧. يتضمن الكتاب الأشكال والرسوم التي جاءت مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بموضوعات الكتاب، وقد تم توظيفها بشكل يمكن الطالب من إدراك العلاقات بين المتغيرات، من خلال عمليات التفسير والتحليل والاستنتاج.

دور الكتاب للمدرس:

إن تناولنا لكل وحدة من الوحدات المقررة على حدة في هذا الكتاب من حيث الأهداف والخطة الزمنية والمعالم والوسائط التعليمية وطرق تدريس المحتوى والتقويم – ليس الهدف منه وضع قيد على المدرس، بحيث نحد من حريته في تناول كل وحدة ومعالجتها أو إلزامه بأسلوب معين، بل هو محاولة من جانبنا نقدمها للمدرس، كي تنير له الطريق وتمهد السبيل لتحقيق الأهداف المنشودة، في الوقت الذي نقدر فيه أن لكل مدرس شخصيته المميزة ومهاراته وإبداعاته الخاصة به.

وأخيراً... فإننا نتمنى أن يكون هذا الدليل في مستوى طموحات زملائنا المدرسين، وأن يجدوا فيه عوناً لهم على أداء رسالتهم التربوية النبيلة حتى تتحقق الأهداف المرجوة.

والله من وراء القصد وهو يهدي إلى سواء السبيل.

Draft

أسس تربوية عامة في تدريس الرياضيات

يجري تدريس الرياضيات على شكل وحدات دراسية موزعة بين صفوف كل مرحلة، وبين التصنيفات الرياضية المعروفة: الأعداد والعمليات عليها والقياس وحساب المثلثات والهندسة التحليلية والجبر والهندسة الفراغية والإحصاء والاحتمال وحساب التفاضل والتكامل calculus بشقيه: التفاضل differentiation والتكامل integration. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيّاً (عبر الصفوف) وحلزونيّاً في كل فرع، ويتوزع أفقيّاً (في كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس – إلى حد ما – وحدة الفكر الرياضي. ويراعى في جميع الحالات التناغم الرياضي لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

Draft

أهداف تدريس الرياضيات

الرياضيات مادة حية تنمو وتتطور، وقد نشأت أصلاً لخدمة حاجة الإنسان في حياته العملية، وما زالت هي الأداة الأساسية لحل المشكلات وخدمة العلوم الأخرى، بل إن التقدم التقني المعاصر هو تقدم يستند إلى الأساليب الرياضية، والنماذج الرياضية التي تستخدم لبناء وتطوير الأجهزة والبرمجيات التي تستخدم فيها. ولا يقتصر استخدام الرياضيات على العلوم الطبيعية والهندسية والطبية والزراعية والفيزيائية، ولكنها تستخدم أيضاً في العلوم الإنسانية والاجتماعية بل وفي الفنون واللغويات. من ناحية أخرى فإن الرياضيات ذاتها تتقدم وتتطور، فهي من حين لآخر تلتفت إلى نفسها لتعيد بناء تركيباتها وأساليب براهينها ومعالجتها وترتيبها، ومن ثم فهي دائماً تأتي بالجديد سواء ظهر بصور رياضية بحتة أو من خلال التطبيقات الواسعة، خاصة في الاقتصاد وفي وسائط الاتصال الإلكتروني وتقنية المعلومات، ومعادلات ومتباينات التوقعات في المجالات المختلفة. ولا شك في أن المدرس لا بد أن يكون على وعي وعلى دراية ولديه ثقافة رياضية عامة عن المادة التي يقوم بتدريسها.

والمدرس – بطبيعة الحال – يواجه دائماً بالسؤال العتيد «لماذا نعلِّم الرياضيات؟»

هناك أكثر من طريقة للتعريف بأهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

١. أهداف معرفية Cognitive

تتعلق بالمفاهيم والنظريات والمهارات العقلية المتدرجة والمتنوعة في تعلم معارف رياضية كثقافة عامة أو كإعداد لدراسات تالية في المراحل التعليمية المتتابعة. وهناك ثلاثة مستويات معرفية: مستوىً أدنى، ويتضمن مجرد تذكر المعلومات واستيعابها؛ ومستوًى متوسط، ويتضمن التطبيقات المباشرة لما يتعلمه الطالب من قوانين ونظريات، ومستوىً أعلى، ويتضمن تنمية مهارات التفكير العليا، وحل المشكلات بما تتطلبه من تحليل وتركيب وتقويم لمسائل وعلاقات ومواقف رياضية وتطبيقية.

٢. أهداف وجدانية Affective

تتعلق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشري، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها في التقدم ونحو أساليبها في التفكير ودقة لغتها في الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البياني.

٣. أهداف نفسحركية Psychomotor

يقصد بها تنمية مهارات عملية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضي هندسي أو حسابي أو حوسبي (متعلقة بالحاسوب) سواء في صورة آلات حاسبة calculators أو حواسيب computers، ومساعدة الطالب على اكتساب مهارات استخدام التقنية المتاحة من أجهزة وأقراص مدمجة CDs جاهزة مناسبة.

Draft

استراتيجيات عامة للتدريس

- استراتيجية التدريس: هي خطة تحركات المدرس في تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسي للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الاستراتيجية بمدى كفاءتها في أن يتعلم الطلاب ما قصد لهم أن يتعلموه بغرض مساعدتهم في أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التي يتعلمونها في ضوء النظرية البنائية constructivism.
- وتتضمن استراتيجية التدريس أن يقوم المدرس بالآتي:
- التقدم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).
- إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.
- توزيع العمل بين أعمال تعاونية في مجموعات صغيرة تعمل تعاونيّاً، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المدرس والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.
- في نهاية كل مناقشة أو عمل تعاوني أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المدرس بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمناً الأساسيات: تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.
- إعطاء الطلاب فرصاً داخل الصف أو في المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.
- تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.
- عند تدريس أي مفهوم أو علاقة بين عدة مفاهيم يعطي المدرس، ويطلب إلى الطلاب، إعطاء أمثلة تمثل المفهوم أو تحقق العلاقة، وأخرى لا تمثلها أو لا تحققها.
- ابتعاد (المدرس) عن الشرح طوال الوقت وكتابة الحلول جاهزة كاملة على اللوح وطلب نقلها في الكراسات من دون مناقشة أو محاولات مسبقة من الطلاب.
- تنويع السلوكيات (أي طرق التدريس) في الحصة الواحدة.
- الحرص على إعطاء رعاية خاصة في فترة العمل الفردي أو في المجموعات التعاونية للطلاب بطيئي التعلم أو من هم دون المستوى في قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.
- تنويع الواجبات سواء داخل الصف أو في المنزل مع مراعاة الفروق الفردية – ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين في الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعفاء»، فيقدم لهم الحد الأدنى، ويلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل متدرجين في الواجبات.
- تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الصف في مكتب المدرس أو في المكتبة.
- مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق في هذا المقرر.

Draft

وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمي هو مادة تعليمية مكتوبة أو مرسومة، أو صورة ثابتة أو متحركة مسجلة على أوراق أو شرائط أو أقراص مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر أو على شكل كتاب ناشط تفاعلي Active Book.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة في عرض المواد التعليمية والبرمجيات واستخدامها. وقد يكون الوسيط التعليمي ملصقاً أو بطاقات كرتونية أو قطعاً خشبية أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صوراً معتمة أو جهاز سينما أو حاسوباً، وقد تكون مواد حسية من الطبيعة أو مصنعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معملية.

والأصل في الوسيط التعليمي هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملاً تعليمياً نشيطاً، لا أن يكتفي بمشاهدته سواء قام المدرس بتشغيله أو كان يعمل آليّاً، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بياني لأحد الجداول أو الدوال الجبرية أو رسم بعض الأشكال الهندسية.

والمبدأ الذي نرتئيه هنا هو أن التقنية بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعددة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمدرس» – بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المدرس في تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

Draft

المحتويات

الجبر

الوحدة ١ النسبة والتناسب والمتتاليات Ratio ,Proportion and Sequences ١٠

النسبة والتناسب Ratio and Proportion ١٢

التغير الطردي Direct Variation ١٨

التغير العكسي Inverse Variation ٢٢

المتتاليات (الأنماط الرياضية) Sequences (Mathematical Patterns) ٢٦

المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence ٢٩

المتتالية الهندسية Geometric Sequence ٣٣

الوحدة ٢ معادلات الدرجة الثانية ٤٣

حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد Solving Quadratic Equations with One Variable ٤٥

كثيرات الحدود من الدرجة الثانية في متغير واحد Polynominals in Degree 2 with One Variable ٤٩

معادلات تتحول إلى الدرجة الثانية Equations Converted into Quadratic Equations ٥٢

الوحدة ٣ الإحصاء Statistics ٥٧

تحليل البيانات Data Analysis ٥٩

الربيعات Quartiles ٦١

الانحراف المعياري Standard Deviation ٦٤

العينات Samples ٦٨

Draft

الوحدة ١

النسبة والتناسب والمتتاليات

الوحدة ١

النسبة والتناسب والمتتاليات Ratio, Proportion and Sequences

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقاً أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءاً من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (Algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحد الرياضيين الشعراء):

على ثلاثة يدور الجبر، المال والأعداد ثم الجذر، فالمال كل عدد مربع، وجذره وأحد تلك الأضلع، والعدد المطلق ما لم ينسب للمال أو للجذر، فافهم تصب.

نشاط إثرائي

والجذر هو الذي نرمز له حالياً بالرمز x (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمي حلولاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذي اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة.

وكان التراث العربي حافزاً لعلماء الغرب على دراسة الرياضيات وتطويرها؛ فقد تابع العلماء ما بدأ به العرب في محاولة لاستخدام الرموز (بدلاً من الكلمات) وإيجاد تعميمات لنظريات مثل ذات الحدين والمتتاليات الحسابية والهندسية وحل الكثير من المشكلات المتعلقة بالأعداد غير النسبية (الجذور الصماء).

ويقول بعض العلماء إن العرب مهدوا لابتكار اللوغاريتمات.

وقد وصل علم الجبر حالياً إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع «كيانات» رياضية جديدة مثل المجموعات والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

يعتبر علم الجبر أساساً لكل الأنشطة في الفروع الرياضية الأخرى وتطبيقاتها.

والأمل معقود عليكم – أبناءنا الطلاب – في استعادة مجدنا العلمي في عصوره الذهبية التي حمل علماؤنا فيها لواء التقدم ومشاعل المعرفة إلى العالم شرقاً وغرباً.

٥

الأهداف

- النسبة
- مقياس الرسم
- خواص التناسب والتناسب المتسلسل
- التغير الطردي: الدالة والثابت والمعدل
- التغير العكسي: الدالة والثابت
- مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

المتتاليات

المتتاليات الحسابية: أساسها، الحد النوني، الأوساط الحسابية ومجموع n من حدود المتتابعة الحسابية

المتتابعة الهندسية: أساسها، الحد النوني، الأوساط الهندسية ومجموع n من حدود المتتابعة الهندسية

المحتويات

١. النسبة والتناسب
٢. التغير الطردي
٣. التغير العكسي
٤. المتتابعات الحسابية
٥. المتتابعات الهندسية

Draft

المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
النسبة والتناسب	النسبة مقياس الرسم خواص التناسب خواص التناسب المتسلسل	إيجاد النسبة بين مسافتين/كميتين إيجاد أحد مكونات التناسب
التغير	التغير الطردي والعكسي دالة التغير الطردي والعكسي معدل التغير الطردي وثابت التغير العكسي مقارنة بين التغير الطردي والعكسي	التعبير عن التغير إيجاد ثابت التغير التعرف إلى المعادلة التي تمثل تغيراً التعرف إلى الشكل البياني الذي يمثل تغيراً التمثيل البياني للتغير
الأنماط الرياضية والمتتاليات	تعريف المتتالية المتتالية الحسابية والهندسية وأساسها الحد النوني للمتتالية الحسابية والهندسية الأوساط الحسابية والهندسية مجموع n من حدود المتتالية الحسابية أو الهندسية	اكتشاف النمط استكمال بعض حدود النمط التعبير عن المتتالية إيجاد حد معين إيجاد مجموع عدد معين من الحدود إيجاد نمط متتابعة بمعلومية شروط معينة

Draft

النسبة والتناسب

Ratio and Proportion

كتاب الطالب من صفحة ٦ إلى صفحة ١١

١. الأهداف:

* استخدام النسبة والتناسب في حلول مسائل حياتية
* حل مسائل تتضمن مقارنة كميات معينة

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

النسبة – مقياس الرسم – التناسب – التناسب المتسلسل

٣. الأدوات والوسائل:

مسطرة مدرجة – أوراق رسم بياني مليمترية – آلة حاسبة

٤. التمهيد:

- اسأل الطلاب:
  – ما نسبة عدد الكتب إلى عدد الدفاتر في حقيبتك؟
  – ما نسبة عدد المكاتب إلى عدد الكراسي؟
  ناقش مع الطلاب معنى نسبة 5 إلى 2.
- اسأل الطلاب عن نسبة عدد الغائبين إلى عدد الحاضرين اليوم في الصف، ونسبة عدد الكراسي إلى عدد طاولات الطلاب داخل الصف.
- ناقش كيفية رسم مخططات للمنشآت (التصميمات الهندسية)، وقراءة الخرائط لتعرف الأبعاد الحقيقية للمسافات بين مدينتين أو موقعين.
- وضح مفهوم مقياس الرسم.

٥. التدريس:

في عمل تعاوني:

- قد يحتاج العمل إلى مسطرة مدرجة وآلة حاسبة للقياس وإجراء العمليات الحسابية.
- لاحظ أن التعريف الرياضي للنسبة هو:
  علاقة بين عددين حقيقيين وتكتب بالصورة $\frac{a}{b}$ أو $a : b$.
- في النسبة – بصفة عامة – ليس من الضروري أن يكون كل من حدي النسبة بالوحدات نفسها أو من النوع نفسه، فمثلاً في مقياس الرسم على الخرائط قد يكون المقياس 1cm : 100 km. وقد توجد نسبة بين عدد البنين وعدد البنات في امتحان الصف العاشر، وقد توجد النسبة بين عدد المدرسين وعدد الطلاب. عند حساب النسب المئوية تراعى وحدات حدي النسبة.

في التناسب

- يمكن البدء بكسور متكافئة مثلاً $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ وإعادة قراءة ذلك بلغة تساوي نسبتين 2 : 1 = 6 : 3، أو بالصورة 1، 2، 3، 6 أربعة أعداد متناسبة والعكس صحيح.

النسبة والتناسب Ratio and Proportion

سوف تتعلم
* النسبة
* مقياس الرسم
* خواص التناسب
* تمارين وتطبيقات هندسية
* خواص التناسب المتسلسل
* مقارنة بين التغير الطردي والعكسي

دعنا نفكر ونتناقش

تعلم أن النسبة هي علاقة بين عددين حقيقيين.
فمثلاً: النسبة بين العددين 3 و4 هي $\frac{3}{4}$
ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة 4 : 3 وتقرأ 3 إلى 4.

مثال (١)

إذا كانت المسافة بين دمشق وحلب 350 km، وكانت هذه المسافة ممثلة في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها 10 cm أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.

الحل

النسبة = 10 : 35 000 000
= 1 : 3 500 000
تسمى النسبة في هذه الحالة مقياس الرسم، وتساوي 1 : 3 500 000 ويمكن كتابة مقياس الرسم بالصورة: 1 cm : 35 km.

عمل تعاوني

رسم مهندس معماري مخططاً لإحدى الشقق كما في الشكل. اشترك مع أحد زملائك في الآتي:
(أ) أوجد بالقياس في الشكل طول كل من: الغرفة (1)، الغرفة (2)، المطبخ، الحمام ثم أكمل الجدول الآتي:

	الطول في الرسم (cm)	الطول الحقيقي (m)	الطول الحقيقي (cm)
غرفة (1)			
غرفة (2)			
المطبخ			
الحمام			

(ب) أوجد مقياس الرسم: m cm
(ج) أوجد النسبة بحيث يكون للبسط والمقام الوحدات نفسها، واختصر النسبة لأبسط صورة.

Draft

- انتقل للصورة العامة $a, b, c, d \Leftarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
متناسبة $ad = bc \Longleftrightarrow$
- قدم أمثلة وأمثلة مضادة للتناسب مثلاً 1, 2, 3, 6 متناسبة ولكن 1, 2, 3, 4 ليست متناسبة – اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة وأمثلة مضادة.
- اعرض تناسباً مثل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ واطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن الخواص التي يمكن أن تستنتجوها ... عمم الخواص الصحيحة على $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- اسأل للتفكير: هل $\frac{10}{2} = 5$ تناسب؟ ضعها في صورة تناسب $\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$ $\quad 10 : 2 = 5 : 1$

في التناسب المتسلسل

- خواص التناسب المتسلسل هي خواص التناسب العادي نفسها.
- اطلب من الطلاب أن يعطوا أمثلة لثلاثيات من الأعداد تكون كل منها تناسباً متسلسلاً مثلاً (1, 2, 4)، (1, 3, 9)، (4, 6, 9).
- اطلب أمثلة عن أربعة أعداد تكون تناسباً متسلسلاً، مثلاً (3, 6, 12, 24).
- ناقش (بأمثلة): هل كل أربعة أعداد في تناسب متسلسل تكون في تناسب عادي؟ وهل العكس صحيح؟
- في حل التمارين، دع الطلاب يستخدمون أكثر من طريقة للحل، مثلاً باستخدام الضرب التقاطعي أو باستخدام أي من خواص التناسب.

دعنا نفكر ونتناقش

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلاً، $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي $12 : 16 = 3 : 4$
وتقرأ 3 إلى 4 وهي نفسها 12 إلى 16.

خواص التناسب

خاصية التساوي

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $\frac{a}{b} \times k = \frac{c}{d} \times k$ حيث $k \in R$.

فمثلاً،
نعلم أن $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ بضرب الطرفين في 2 نجد أن $\frac{15}{20} \times 2 = \frac{3}{4} \times 2$

أي أن $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

مثال (١)

إذا كان $\frac{5}{6} = \frac{a}{9}$ فأوجد قيمة a.

الحل

$\frac{5}{6} = \frac{a}{9}$ بضرب الطرفين بـ 54

$\frac{5}{6} \times 54 = \frac{a}{9} \times 54$

$45 = 6a$

$a = \frac{45}{6}$ بقسمة البسط والمقام على 3.

$a = \frac{15}{2}$

$a = 7.5$

فيكون $\frac{5}{6} = \frac{7.5}{9}$ (تحقق من صحة ذلك).

٧

Draft

أفكار مساعدة:

* في المثال (١):

اكتب على اللوح $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ثم اسأل الطلاب: لماذا b و d لا يمكن أن تساوي أي منهما قيمة الصفر؟ [القسمة على صفر غير معرفة].

* في المثال (٣):

وضح للطلاب أن العدد الصحيح يمكن كتابته بصورة كسر مقامه العدد 1. مثلاً: $5 = \frac{5}{1}$

* في المثال (٤):

اطلب إلى الطلاب حل المسألة التالية:

أجاب حامد بشكل صحيح على ستة أسئلة من أصل سبعة في امتحان الرياضيات. استخدم التناسب لإيجاد النسبة المئوية للإجابات الصحيحة. $\left[\frac{6}{7} = \frac{x}{100} ; x \simeq 86\%\right]$

سؤال رقم ٤ صفحة ٩:

دع متطوعين يتبادلون مسائلهم مع الصف أو اطلب إلى الطلاب أن يتبادلوا مسائلهم كل واحد مع شريك له.

٦. الربط:

مسألة من البيئة: كتب على باب أحد المخازن ما يلي:

– ادفع $\frac{2}{3}$ السعر فقط.

– احصل على حسم 50%.

– إذا كان سعر القميص 42 ليرة، فأيهما أفضل العروض لك؟

الحل:

– العرض الأول: $\frac{2}{3} = \frac{x}{42} \Rightarrow x = 28$

– العرض الثاني: $\frac{50}{100} = \frac{x}{42} \Rightarrow x = 21$

العرض الثاني هو الأفضل.

٧. أخطاء متوقعة:

قد يكتب الطلاب النسبة $\frac{a}{b}$ على الشكل: $b : a$

وقد يخطئون أيضاً في كتابة التناسب المتسلسل: (1, 3, 9)

٨. التقويم:

(١) مستطيل $ABCD$ طوله يساوي 18 cm وعرضه يساوي 10 cm مشابه لمستطيل $KLMN$ طوله يساوي 27 cm. احسب عرض $KLMN$. $\frac{18}{27} = \frac{10}{x} ; x = 15$

(٢) 12.5 هي 75% لعدد ما. أوجد هذا العدد.

$\frac{75}{100} = \frac{12.5}{x} ; x = 16.667$

(٣) ما نسبة 24 إلى 87؟ $x = \frac{27.586}{100}$

٧ خاصية الضرب التقاطعي

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، فإن $ad = bc$.

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

فمثلاً $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

من ذلك نجد أن:

$12 \times 4 = 16 \times 3$ (واضح أن كلا من الطرفين يساوي 48.)

تعريف

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإنه يقال إن a, b, c, d متناسبة

ويسمى a و d طرفي التناسب،

كما يسمى b و c وسطي التناسب

ولأنه في هذه الحالة $ad = bc$

فمن خاصية الضرب التقاطعي يكون:

ناتج ضرب الطرفين = ناتج ضرب الوسطين

مثال (٢)

أثبت باستخدام خاصية الضرب التقاطعي أن $\frac{4}{1.5} = \frac{8}{3}$

الحل

بما أن $4 \times 3 = 1.5 \times 8$ (كل من الطرفين يساوي 12)

إذاً التناسب صحيح.

مثال (٣)

أوجد قيمة y في التناسب $-\frac{3}{4} = \frac{y}{2.5}$.

الحل

$-3 \times 2.5 = 4 \times y$ (خاصية الضرب التقاطعي)

$-7.5 = 4y$

$y = -\frac{7.5}{4}$ بقسمة الطرفين على 4

$y = -1.875$

٨

Draft

٩. مسألة اليوم:

لحساب فاتورة الكهرباء على المستهلك، استخدمت شركة الكهرباء المعادلة التالية:

$$C = 6 + a \times 0.13 + b \times 0.15 + f \times 0.012$$

حيث a هي أول 500 كيلوواط ساعة مستهلكة بسعر 0.13 ليرة لكل كيلوواط ساعة وb هي الكمية المستهلكة زيادة عن 500 كيلوواط ساعة بسعر 0.15 ليرة للكيلوواط ساعة وأخيراً f هي الكمية المستهلكة بكاملها بسعر 0.012 ليرة للكيلوواط ساعة. ما المبلغ الذي سيدفعه المستهلك للكمية 850 كيلوواط ساعة؟

$$C = 6 + (500 \times 0.13) + (350 \times 0.15) + (850 \times 0.012) = 133.7$$

المبلغ الذي سيدفعه المستهلك هو: 133.7 ليرة

١٠. إجابات وحلول:

حلول التمارين والمسائل ص ٩:

(١) 60 (اشرح معنى المعدل نفسه).

(٢) أ، ج، د (توفر خاصة الضرب التقاطعي)، لاحظ عدم توفرها في (ب)، (هـ).

(٣) $\frac{120}{12} = \frac{x}{40}$

$x = 400$

المتوسط 76 دقة في الدقيقة $\frac{d}{76} \times 100 = \ldots \%$

دع الطلاب يبحثون في المكتبة أو يسألون طبيب المدرسة.

(٤) مثلاً: النسبة بين عرض مستطيل وطوله هي 5 : 2. تم تكبير هذا المستطيل بحيث أصبح طوله 9 وحدات فكم يكون عرضه؟ (3.6) اطلب أمثلة من الطلاب.

(٥) $2.5 : x = 1.5 : 6$

$\frac{1.5}{6} = \frac{2.5}{x} \quad x = \frac{2.5 \times 6}{1.5} = 10\,m$

$\frac{1.5}{6} = \frac{3.5}{y} \quad y = \frac{3.5 \times 6}{1.5} = 14\,m$

الأبعاد الحقيقية 10 m × 14 m ... توجد طرق أخرى للحل (مثلاً: 1 cm يمثل 4 cm ...)

(٦) (أ) الأبعاد متناسبة ($\frac{6}{9} = \frac{16}{24}$)

(ب) النسبة بين المساحتين = مربع النسبة بين الأبعاد

(٧) يمكن استنتاج (أ)، (ب)، (ج) (هـ) (بالضرب التقاطعي أو بطرق جبرية أخرى ...)، (د) و(و) لا يمكن استنتاجهما لأن الطرفين في كل منهما غير متساويين، ولا يؤديان للتناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

في الزراعة، في عام 1999 أنتجت إحدى المزارع 2650 طناً من البندورة، وفي عام 2000 أنتجت المزرعة نفسها 2782.5 طن من البندورة. احسب النسبة المئوية للزيادة في إنتاج هذه المزرعة.

الحل

الزيادة في الإنتاج = 2650 − 2782.5

= 132.5 طناً

لتكن x هي النسبة المئوية للزيادة:

$\frac{x}{100} = \frac{132.5}{2650}$

$2650x = 100 \times 132.5$

$x = \frac{13250}{2650} = 5$

إذاً النسبة المئوية للزيادة هي 5.

أي أن الزيادة بلغت 5% من الإنتاج في العام السابق.

تمارين

١– مزرعة فريز تنتج 3615 kg في الدونم سنوياً. كم دونماً يلزم لإنتاج 216 900 kg بالمعدل نفسه؟

٢– **تفكير ناقد:** أيّ من أزواج النسب الآتية تكوّن تناسباً؟ علل إجابتك.

(أ) $\frac{15}{20}, \frac{6}{8}$ (ب) $\frac{4}{5}, \frac{9}{12}$ (ج) $\frac{0.4}{0.5}, \frac{0.12}{0.15}$

(د) $\frac{20}{24}, \frac{5}{6}$ (هـ) $\frac{-1}{25}, \frac{3}{100}$

٣– إذا كان قلب طائر الكناري يدق 120 دقة كل 12 ثانية. استخدم التناسب لإيجاد عدد دقات الكناري في 40 ثانية.

• ابحث عن عدد دقات قلب الإنسان العادي في المتوسط في الدقيقة. حاول أن تقيس ذلك بنفسك ثم اسأل أحد الأطباء وقارن بين النتيجتين، واحسب النسبة المئوية لإجابتك بالنسبة لما يقوله الطبيب فيما يتعلق بعدد دقات قلب الإنسان.

٤– اكتب مسألة من تأليفك يمكن أن تحلها باستخدام التناسب $\frac{2}{5} = \frac{x}{9}$ ثم حل المسألة.

٥– **هندسة معمارية:** رسم مخطط لحظيرة بمقياس رسم 1.5 cm لكل 6 m. فإذا كانت أبعاد المخطط في الرسم هي 2.5 cm × 3.5 cm؛ احسب الأبعاد الحقيقية للحظيرة.

٦– **مستطيلان:** $ABCD$ طوله 16 cm وعرضه 6 cm، $A'B'C'D'$ طوله 24 cm وعرضه 9 cm.

(أ) هل أبعاد المستطيلين متناسبة؟

(ب) هل النسبة بين مساحتي المستطيلين تساوي النسبة بين أطوال أضلاعهما؟

٧– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فأي من التناسبات الآتية يمكن استنتاجها من هذا التناسب؟ علل إجابتك.

(أ) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (ب) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ج) $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}$

(د) $\frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$ (هـ) $bc = ad$ (و) $cd = ab$

٩

Draft

(٨) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ولكن $3 \neq 6$، $5 \neq 10$

(٩) ليكن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

إذن $a = bk$، $c = dk$، $e = fk$، ثم عوض عن الطرف الأيمن $k = \ldots$

مثال $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

$\frac{1+2+3}{2+4+6} = \frac{6}{12}$ إحدى النسب المتساوية

(١٠) إحدى طرق الحل $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$a = bk$، $c = dk$ ثم عوض في طرفي

$$\frac{a-2c}{b-2d} = \frac{bk-2dk}{b-2d} = \frac{k(b-2d)}{b-2d} = k$$

$$\frac{2a+2c}{3b+2d} = \frac{3bk+2dk}{3b+2d} = \frac{k(3b+2d)}{3b+2d} = k$$

(١١) بالطريقة نفسها (١٠) .. أو بطرق أخرى.

(١٢) $(3x+2n)(y-2m) = (x-2n)(3y+2m)$

ضرب تقاطعي

... بالاختصار $xm = yn \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{n}{m}$

(١٣) عوض في طرفي المطلوب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \Rightarrow a = bk, c = dk$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{bk \times dk}{bd} = k^2$$

$$\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^2 = \left(\frac{bk+dk}{b+d}\right)^2 = k^2\frac{(b+d)^2}{(b+d)^2} = k^2$$

المشروع: ليكن وزن الطالب w، إذن $\frac{w}{65} = \frac{x}{300}$ حيث x عدد السعرات المفقودة وبمعلومية w احسب x، وكرر العمل بالنسبة إلى الأنشطة الأخرى.

٨– قال الطالب «مصطفى» إنه إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $a = c, b = d$. أعط مثالاً يبين أن ما قاله مصطفى خطأ.

٩– أثبت جبرياً الخاصية الآتية:

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$ أعط مثالاً حسابياً يوضح صحة الخاصية التي أثبتها.

١٠– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فأثبت أن $\frac{a-2c}{b-2d} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$

١١– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ فأثبت أن $\frac{a+2c+3e}{b+2d+3f} = \frac{c-3e}{d-3f}$

١٢– إذا كان $\frac{x-2n}{y-2m} = \frac{3x+2n}{3y+2m}$ فأثبت أن x, y, n, m متناسبة.

١٣– إذا كان $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ فأثبت أن $\left(\frac{c+a}{d+b}\right)^2 = \frac{ca}{db}$

مشروع

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حرارية تتناسب تقريباً مع وزن الشخص. والجدول الآتي يبين ذلك لشخص وزنه 65 kg، وعند قيامه بالتدريبات الآتية لمدة 60 دقيقة.

قم بأحد هذه الأنشطة لمدة 60 دقيقة، واكتب تناسباً تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها (بالتقريب).

اكتب التناسب إذا قمت بنشاط آخر لمدة 3 مرات في الأسبوع.

التدريب	السعرات المحروقة
المشي 4 – 5 km/h	300
الجري 6 – 10 km/h	650
السباحة أو التزلج	500
لعبة كرة قدم	400

دعنا نفكر ونتناقش

التناسب المتسلسل (الهندسي) Geometric Proportion

إذا كانت $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ فإنه يقال إن a، b، c في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي) وبالعكس: إذا كانت في تناسب متسلسل فإن $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

ويسمى b الوسط المتناسب للعددين a, c أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى a, c طرفي التناسب.

فمثلاً $2, 4, 8$ في تناسب متسلسل لأنّ $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

١٠

Draft

حلول تدريب ص ١١

(١) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ ثم اتبع الطرق السابقة.

(٢) $\frac{3}{n} = \frac{n}{m} = \frac{m}{l} = \frac{l}{243} = \theta$

$$l = 243\theta, \quad m = 243\theta^2, \quad n = 243\theta^3$$

$$3 = 243\theta^4 \Rightarrow \theta = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow l = \pm 81$$

$$m = 27, \quad n = \pm 9$$

(٣) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \theta$

واستخدم الطريقة نفسها بالتعويض في الطرفين.

(٤) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \theta$ ..... أكمل

تدريب

اكتب 3 أعداد في تناسب متسلسل.

خواص التناسب المتسلسل

خاصية (1)

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ فإن $b^2 = ac$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلاً في حالة 3 ,9 ,27 نجد أن:

$27 \times 3 = 9^2$ (كل من الطرفين = 81)

خاصية (2)

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = m$ فإن $a = dm^3, b = dm^2, c = dm$

فمثلاً في حالة $\frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$ نجد أن:

$16 = 2 \times 2^3, 8 = 2 \times 2^2, 4 = 2 \times 2$

مثال (١)

إذا كانت d، c، b، a، في تناسب متسلسل، أثبت أن:

$$\frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{a}{b}$$

الحل

لتكن $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = m$ (تناسب متسلسل)

إذن $a = dm^3, b = dm^2, c = dm$

$$\frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{dm^3 + dm^2 + dm}{dm^2 + dm + d} = \frac{dm(m^2+m+1)}{d(m^2+m+1)} = \frac{dm}{d} = m = \frac{a}{b}$$

تدريب

١– إذا كان c، b، a ثلاث كميات في تناسب متسلسل، فأثبت أن:

$$\frac{a+3b}{b+3c} = \frac{a-2b}{b-2c}$$

٢– إذا كانت 3، l، m، n، 243 في تناسب متسلسل، أوجد l، m، n

٣– إذا كانت a, b, c, d في تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\frac{a+2b-c}{b+2c-d} = \frac{a+3b}{b+3c}$

٤– إذا كان a, b, c, d, e في تناسب متسلسل، فأثبت أن: $\frac{a+b-c-d}{b+c-d-e} = \frac{d}{e}$

١١

Draft

التغير الطردي Direct Variation

كتاب الطالب من صفحة ١٢ إلى صفحة ١٨

١. الأهداف:

- الربط بين الانحدار/الميل (Slope) وثابت التغير
- استخدام ثابت التغير لحل المسائل
- حل مسائل حياتية تتعلق بالتغير مثل القوى والأوزان

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

التغير الطردي

٣. الأدوات والوسائل:

مسطرة مدرجة – أوراق مليمترية – آلة حاسبة

٤. التمهيد:

- اسأل الطلاب:
  - ما المتغير؟
  - ما الانحدار؟
- اسألهم عن الأنماط مثلاً العد بالاثنينات واسألهم عن معنى معامل المتغير وعن كيفية قراءة الجداول والبيانات وكيفية رسم المنحنيات والرسم البياني.
  - هيئ الطلاب لفكرة التغير. اطلب إليهم ذكر بعض الأشياء التي تغيرت عندهم من العام الماضي (مثلاً: السن، الصف الدراسي، الوزن ...).

٥. التدريس:

- اسأل عن أنماط تحتوي على كميات تتضاعف (مثلاً: عدد الأيادي عند خمسة أشخاص، عدد الأجنحة في 8 عصافير ...) واطلب إليهم أن يعبروا عن ذلك في صورة معادلات (مثلاً $y = 2x$).
- اعرض ثلاث صيغ لمثال التغير الطردي كما في مثال الصور المتحركة في السينما، الجدول، الشكل البياني، المعادلة ($y = 24x$). دع الطلاب يلاحظون أن كلاًّ منها يعبر عن العلاقة نفسها (تغير طردي).
- اربط بين قيمتي x، y في كل صف بالجدول والنقطة التي تمثل هذا الربط في الشكل البياني.
- كرر عملية الربط مع المعادلة (تساوي الطرفين بعد التعويض).
- دع الطلاب يعبرون بلغتهم عن فهمهم للمصطلحات: تغير، تغير طردي، معدل التغير، ثابت التغير، معامل x في المعادلة ... اشرح ببساطة مفهوم ميل المستقيم.

التغير الطردي — Direct Variation

سوف تتعلم
* التغير
* التغير الطردي
* دالة التغير الطردي
* ثابت التغير الطردي
* معدل التغير الطردي

دعنا نفكر ونتناقش

التغير

التغير هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء فمثلاً:

درجات الحرارة تتغير بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.

وزن الطفل يتغير ويزداد مع نموه.

الأسعار تتغير.

تدريب

اذكر بعض الأشياء التي تتغير في حياتك.
اذكر بعض الأشياء التي تتغير بسبب تغير أشياء أخرى.
هل تتغير مساحة المربع بتغير طول ضلعه؟ ما نوع هذا التغير في رأيك؟
اذكر بعض الظواهر التي لا تتغير – أي الظواهر الثابتة.
اذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيات.
إذا كان دخل رب الأسرة 6 000 ليرة سورية في الشهر فهل يتغير متوسط نصيب كل فرد من أفراد الأسرة بحسب عددهم؟ أكمل الآتي:
إذا زاد عدد أفراد الأسرة فإن متوسط نصيب كل شخص ...
إذا نقص عدد أفراد الأسرة فإن متوسط نصيب كل شخص ...
وإذا كان عدد أفراد الأسرة 4 أشخاص فإن متوسط نصيب كل فرد شهرياً هو ...
وإذا أسرف أحد أفراد الأسرة في مطالب غير ضرورية فإن متوسط نصيب كل فرد (يزيد/ينقص) ... شهرياً
وفي هذه الحالة ... (تستطيع/لا تستطيع) الأسرة شراء كل ما يلزمها.

التغير الطردي

مثال توضيحي

الصور المتحركة في السينما

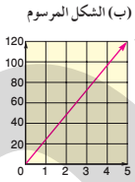
عندما تشاهد فيلماً سينمائياً عادياً فإن 24 صورة فردية تسطع سريعاً على الشاشة كل ثانية. فيما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

١٢

(أ) الجدول

x عدد الثواني	y عدد الصور
1	24
2	48
3	72
4	96
5	120

(ب) الشكل المرسوم



(ج) العلاقة بين عدد الصور (y) وعدد الثواني (x) هي:

$y = 24x$

مستخدماً (أ)، (ب)، (ج) أجب عن الآتي:

(أ) ما معدل التغير في البيانات المبينة في الجدول؟
(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البياني؟
(ج) ما معامل x في العلاقة بين x و y؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغير، ميل المستقيم، معامل x؟

نلاحظ في هذا المثال أن عدد الصور يتغير طردياً مع عدد الثواني التي تظهر فيها. (كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض النسبة نفسها) وتسمى هذه العلاقة باسم «التغير الطردي».

التغير الطردي

يمثل التغير الطردي بدالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة:
$y = kx$ حيث $k \neq 0$
ويسمى k ثابت التغير.

ملاحظات:

الشكل البياني لمعادلة التغير الطردي $y = kx$ هو خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (انظر الشكل ب).
يمكن كتابة المعادلة الخطية $y = kx$ بالصورة: $k = \frac{y}{x}$ حيث $k \neq 0$.
ثابت التغير k = معدل التغير في البيانات التي تصف التغير.
الثابت k = ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة بيانياً.
في حالة التغير الطردي فإن ثابت التغير = معدل التغير = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغير.

١٣

Draft

- نبه إلى أن ثابت التغير (معامل x) لا يمكن أن يكون صفراً.
- كن دقيقاً في تعريف التغير الطردي على أنه يمثّل دالة خطية بالصورة $y = kx$ حيث $k \neq 0$ وابتعد عن التعريفات القديمة غير الصحيحة المرتبطة بالزيادة والنقصان.
- استخدم المصورات والملصقات المناسبة.
- أعط أمثلة وأمثلة مضادة للتغير الطردي. لاحظ شرط مرور المستقيم الممثل لدالة التغير الطردي بنقطة الأصل، وأن الدالة الممثلة له على الصورة $y = kx$.
  وليست على الصورة $y = kx + a$، أي أن a لا بد أن تكون صفراً في حالة التغير الطردي.
- عود الطلاب على إيجاد y بدلالة x، x بدلالة y في المعادلة $y = kx$.

مثال (٣):

* شجع الطلاب على رسم النقط التي سيمر بها المنحني.
* في أي نقطة مميزة يمر المستقيم الذي يمثل التغير الطردي؟
* أرشد الطلاب على فهم أن الرسم البياني للتغير الطردي هو مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٦. الربط:

إن الوزن الذي يحدثه جسم ما يتغير طرديّاً مع كتلته.

إذا كانت كتلة حديدية تساوي 6 كغم وكان وزنها يساوي 58.8 N، اكتب العلاقة بين الكتلة والوزن.

$y = 9.8\,x$

حيث: الكتلة = x والوزن = y

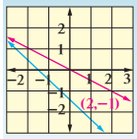
٧. أخطاء متوقعة:

في التدريب ص ١٥ قد يضع الطلاب 7 ثواني في المكان غير المناسب. مد يد المساعدة واشرح لهم أن

$y = \frac{10}{3}x$ تعني $y = 7$ ثواني فنحصل على x

٨. التقويم:

كلّف الطلاب بحل التمرين ١٢ بأقسامه الثلاثة وتحقّق من فهمهم التغير الطردي.



مثال توضيحي

أيّ من المستقيمين في الشكل الآتي يمثل تغيراً طردياً؟

الحل

المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2, -1)$ هو الذي يمثل تغيراً طردياً بين y، x.

ثابت التغير $\frac{y}{x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

المستقيم الثاني لا يمرُّ بنقطة الأصل فهو لا يمثل تغيراً طردياً.

مثال (١)

أي من المعادلات الآتية تمثل تغيراً طردياً؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

(أ) $2y + 5x = 0$ (ب) $5x + 2y = 9$

الحل

(أ) $2y + 5x = 0$

$2y = -5x$

$y = -\frac{5}{2}x$ وهي على الصورة $y = kx$

وهذه تمثل تغيراً طردياً، حيث ثابت التغير $= -\frac{5}{2}$

(ب) $5x + 2y = 9$

$2y = -5x + 9$

$y = \frac{-5}{2}x + \frac{9}{2}$ وهذه ليست على الصورة $y = kx$

إذن هذه المعادلة لا تمثل تغيراً طردياً.

١– تفكير ناقد: الطالبة "سلاف" تعوض عن (x, y) بالزوج المرتب $(0, 0)$ في معادلة ما لتبحث ما إذا كانت المعادلة تمثل تغيراً طردياً أم لا. هل طريقة «سلاف» تصلح؟ إشرح ذلك.

إرشاد: هذه الطريقة تصلح. إذا حصلت على تساوي الطرفين في المعادلة، كانت المعادلة خطية وهي تمثل فعلاً تغيراً طردياً.

فكّر في إجابة أخرى.

٢– أيّ من المعادلات الآتية تمثل تغيراً طردياً؟

أوجد ثابت التغير في هذه الحالة.

(أ) $7y = 2x$

(ب) $3x + 4y = 8$

(ج) $y - 7.5x = 0$

١٤

٩. مسألة اليوم:

علق بدر سبعة شرائط إنارة في منزله. بعض هذه الشرائط يحمل 75 ضوءاً وبعضها الآخر 100 ضوء. بسبب عطل كهربائي في بعض الشرائط، انطفأ $\frac{1}{3}$ الأضواء وبقي 400 ضوء مشتعلاً (مضاء). كم شريطاً يحمل 75 ضوءاً؟ [الحل: لنأخذ x فئة 75 ضوءاً و$(7 - x)$ فئة 100 ضوء، فيكون عدد الأضواء هو:

$75x + 100\,(7 - x)$.

والمعادلة هي: $\frac{(75x + 700 - 100x) \times 2}{3} = 400$

نحصل على $x = 4$

[إذن يوجد 4 شرائط تحمل 75 ضوءاً.]

Draft

١٠. إجابات وحلول:

تفكير ناقد

(١) طريقة أخرى: أوجد زوجين مرتبين (x_1,y_1)، (x_2,y_2) يحققان المعادلة فإذا وجدت أن:

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ فإن المعادلة تمثل تغيراً طرديّاً.

(٢) (أ)، (ج)

$\frac{2}{7}$، 7.5 على الترتيب

تدريب ص ١٥

$$y = \frac{10}{3}x \Rightarrow x = \frac{3}{10}y = \frac{3}{10}\times 7 = 2.1\,\text{km}$$

إذن $x = 2.1$ km

حلول التمارين ص ١٧، ١٨

تدريب

(١) $F = \frac{275}{12\,000}W$

(٢) $4.3 = \frac{275}{12\,000}W \Rightarrow W = \frac{4.3\times 12\,000}{275} = \ldots$

تمارين

(١) a ، b لأنها تمر بنقطة الأصل

(٢) (أ) $\frac{5}{3}$ ، (ج) $\frac{1}{4}$، (د) $\frac{8}{3}$

(٣) نعم لأن $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ($\frac{y}{x}$ = ثابت)

(٤) (أ) $(y = 1.8x)$، (ج) $(y = -\frac{3}{2}x)$

مثال (٢) تطبيقات حياتية

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغير طرديّاً مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة 3 km من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد 10 ثوان من رؤية البرق. اكتب المعادلة التي تربط العلاقة بين المسافة والزمن.

الحل

لتكن x = المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،
ولتكن y = الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.
بما أن الزمن يتغير طرديّاً مع المسافة،
معادلة التغير الطردي: $y = kx$
وحيث إن $y = 10$، $x = 3$
$10 = k\times 3$
$k = \frac{10}{3}$ ثابت التغير
المعادلة هي:
$y = \frac{10}{3}x$ هي العلاقة المطلوبة
حيث x تقاس بالكيلومترات، y بالثواني

تدريب

استخدم المعادلة في المثال السابق (٢) لإيجاد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت صوت الرعد بعد 7 ثوان من رؤيتك للبرق.

مثال (٣)

بيّن فيما إذا كانت y تتغير طرديّاً مع x في كل من بيانات الجدولين (أ) و(ب). اكتب معادلة التغير في حالة التغير الطردي.

(أ)

x	y	$\frac{y}{x}$
−3	2.25	$\frac{2.25}{-3} = -0.75$
1	−0.75	$\frac{-0.75}{1} = -0.75$
4	−3	$-\frac{3}{4} = -0.75$

(ب)

x	y	$\frac{y}{x}$
2	−1	$-\frac{1}{2} = -0.5$
4	1	$\frac{1}{4} = 0.25$
6	3	$\frac{3}{6} = 0.5$

١– الجدول (أ) يمثل تغيراً طرديّاً حيث ثابت التناسب −0.75.
معادلة التغير هي $y = -0.75x$
٢– الجدول (ب) لا يمثل تغيراً طرديّاً لأن $\frac{y}{x}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

١٥

تدريب

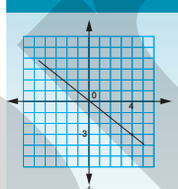
تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبر عن تغير طردي؟

الحل

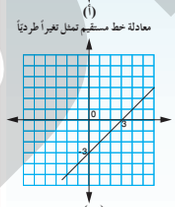
لا. ليست كل معادلة خط مستقيم تغير طردي.
معادلة التغير الطردي تكون بالصورة $y = kx$، أي تمر بنقطة الأصل.
مثلاً
البيانات في الجدول (أ) تمثل بالمعادلة $y = -0.75x$
وهي معادلة تغير طردي، لأنها بالصورة $y = kx$
بينما البيانات في الجدول (ب) تمثل بالمعادلة $y = x - 3$
وهي ليست بالصورة $y = kx$

التعبير عن التغير الطردي

يمكن التعبير عنه باستخدام التناسب (x, y)
حيث تكون النسبة $\frac{y}{x}$ ثابتة لكل زوج مرتب
وحيث $x \neq 0$ في جميع الحالات. أي أن في التغير الطردي يكون
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots$ لجميع الأزواج المرتبة (x, y)
وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغير k.



(أ)
معادلة خط مستقيم تمثل تغيراً طردياً



(ب)
معادلة خط مستقيم لا تمثل تغيراً طردياً

مثال (٤) تطبيقات حياتية

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغير طرديّاً مع وزن الجسم. فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها 0.275 kgw لتقوم إحدى المعدات برفع جسم وزنه 12 kgw. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامها في هذه الآلة لرفع جسم وزنه 45 kgw.
ملاحظة: kgw تسمّى كيلوغراماً ثقليّاً.

الحل

لنرمز للقوة بالرمز F ووزن الجسم بالرمز W.
$F = K\times W$
$\frac{F_1}{W_1} = \frac{F_2}{W_2}$
$\frac{F_2}{45} = \frac{0.275}{12}$
$45\times 0.275 = F_2\times 12$
$F_2 = \frac{45\times 0.275}{12} = 1.03125\,kgw$
أي أنك تحتاج إلى كيلوغرام ثقلي واحد تقريباً لرفع 45 kgw باستخدام هذه الرافعة.

١٦

Draft

(٥) (أ) حدد النقطة ثم صلها بنقطة الأصل.

(٦) القوة تساوي:

$$W = \frac{5}{2}F, F = \frac{2}{5}W = \frac{2}{5} \times 40 = 16 \text{ kg w}$$

(٧) $c = 0$

(٨) (أ) خطأ، لأنه إذا كانت $x = 0$ فإن y لا بد أن تساوي صفراً.

(ب) صواب، النسبة تظل ثابتة.

(ج) خطأ، لأن معادلة الخط العمودي تكون بالصورة $x = a$ إنه مهما تغيرت y فإن x ثابتة.

(٩) (أ) النسبة $\frac{y}{x}$ ثابتة لكل زوج متناظر في البيانات.

(ب) إذا كان يمر بنقطة الأصل، ولا يكون عمودياً ولا أفقياً.

(١٠) كمية الدم (y) = ثابت × الوزن (x).

$$\text{ثابت التغير} = \frac{\text{كمية الدم}}{\text{الوزن}} = \frac{5}{72}$$

$$y = \frac{5x}{72}$$

(د) اسأل الطبيب أو استخدم المعادلة بعد أن تعرف وزنك.

(١١) $d = t \times n$ إذن

$n = 0.45$ km/m (كم/ الدقيقة)

$d = 30 \times 0.45 = 13.5$ km (كم)

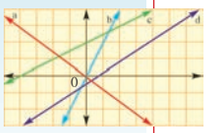
(١٢) (أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $y = -2x$

تدريب

١– اكتب معادلة التغير الطردي للمثال السابق.

٢– استخدم المعادلة التي استنتجتها في (١) لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوة قدرها 4.3 kgw (في نفس الرافعة).

تمارين



١– أيّ من الأشكال البيانية الآتية يمثل تغيراً طردياً؟ علّل إجابتك.

٢– أيّ من المعادلات الآتية تمثل تغيراً طردياً؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

(أ) $y = \frac{5}{3}x$ (ب) $y = 2x + 4$

(ج) $y = \frac{x}{4}$ (د) $3y = 8x$ (هـ) $x + 5y = 10$

٣– **تفكير ناقد:** هل يمكن أن تقع النقطتان (3, 2)، (6, 4) على الشكل البياني للمعادلة التي تمثل تغيراً طردياً؟ اشرح إجابتك.

٤– أيّ من بيانات الجداول الآتية تتغير فيها y طردياً بتغير x؟ أوجد معادلة التغير الطردي في حالة توفرها.

(أ)

x	y
3	5.4
7	12.6
12	21.6

(ب)

x	y
−2	1
3	6
8	11

(ج)

x	y
−6	9
1	−1.5
8	−12

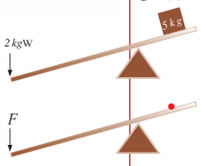
(د)

x	y
−5	−13
3	7.8
9	2.16

٥– ارسم الشكل البياني الذي يمثل علاقة التغير الطردي، والذي يحتوي على النقطة المعطاة:

(أ) (2,5) (ب) (−2,5)

(ج) (2,−5) (د) (−2,−5)



٦– **الفيزياء:** الكتلة التي يمكن أن ترفعها الرافعة المبينة تتغير طردياً بتغير القوة المستخدمة. أوجد القوة الواجب تطبيقها لرفع صندوق كتلته 40 kg.

٧– **تفكير ناقد:** أوجد قيمة c التي تجعل العلاقة $ax - by = c$ علاقة تغير طردي.

٨– حدد العبارات الصواب والعبارات الخطأ. علّل إجابتك.

(أ) الشكل البياني لتغير طردي يمكن أن يمر بالنقطة (0, 3)

(ب) إذا ضاعفت قيمة x في معادلة تغير طردي فإن قيمة y تتضاعف أيضاً.

(ج) الشكل البياني لتغير طردي يمكن أن يكون مستقيماً رأسياً.

١٧

٩– كيف يمكنك الحكم على أن:

(أ) مجموعتين من البيانات ترتبطان بتغير طردي؟

(ب) مستقيماً معيناً يمثل الشكل البياني لتغير طردي؟

١٠– **الأحياء:** تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طردياً بتغير وزنه؛ فإذا كانت كمية الدم في الشخص الذي وزنه 72 kg هي 5 كوارتو (الكوارتو تساوي $\frac{1}{4}$ gallon).

(أ) أوجد ثابت التغير.

(ب) اكتب معادلة التغير التي تربط كمية الدم (بالكوارتو) مع وزن الشخص (بالكيلوغرام).

(ج) ارسم شكلاً بيانياً لهذه المعادلة.

(د) ما كمية الدم التي يحتويها جسمك (تقريباً)؟

الزمن بالدقيقة	المسافة (km)
10	4.5

١١– يتدرب "كريم" على قيادة الدراجة بحيث يسير بسرعة ثابتة خلال فترة التدريب بحسب البيانات المعطاة، باستخدام المعادلة أو التناسب الذي يعبر عن هذا التغير. أوجد المسافة التي يقطعها "كريم" في 30 دقيقة.

١٢– **اختبر نفسك:**

كل من الآتي يعبر عن تغير طردي

(أ) $3x - 2y = 0$ اكتب ثابت التغير.

(ب) $3x - 2y = 3y$ اكتب ثابت التغير.

(ج) اكتب معادلة التغير.

x	y
−2	4
2	−4
3	−6
4	−8

١٨

Draft

التغير العكسي Inverse Variation

كتاب الطالب من صفحة ١٩ إلى صفحة ٢٣

١. الأهداف:

- تعرف التغير العكسي
- تمييز التغير العكسي عن التغير الطردي
- استقصاء علاقات تمثل تغيراً عكسيّاً مثل: الوقت والعمل
- رسم بياني لدالة على شبكة الإحداثيات

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

التغير العكسي

٣. الأدوات والوسائل:

مسطرة مدرجة – أوراق مليمترية – آلة حاسبة

٤. التمهيد:

- راجع مع الطلاب مواضع النقط ذات الأزواج المرتبة على شبكة الإحداثيات.
- اسأل الطلاب عن علاقة بين متغيرين x و y وكيف إذا زادت x زادت معها y. ثم إذا زادت x تناقصت y.
- اطلب إلى الطلاب رسم منحنى الدالة $y = \frac{5}{x}$ على شبكة الإحداثيات.

٥. التدريس:

كلف جميع المجموعات إكمال الجدول في عمل تعاوني ثم الإجابة عن الأسئلة. ناقش إجابات المجموعات مع الطلاب.

مثال إضافي: يصعب على الطلاب في بعض الأحيان مقارنة الأعداد على الجداول. مد يد المساعدة وارسم هذا الجدول على اللوح.

x	2	4	6
y	4	16	36

ثم اسألهم إذا كان يمثل تغيراً طرديّاً أو تغيراً عكسيّاً أو لا شيء من ذلك. استخدم هذا المثال كي تساعد الطلاب على دراسة الأعداد الموجودة كلها في الجدولين أ وب.

دعهم يفكرون فيما إذا كان الفريق مكوناً من 160 شخصاً، فهل يمكن من الناحية العملية إتمام العمل في يوم واحد؟ ساعد الطلاب على أن يتفهموا أهمية الظروف الواقعية في عالم الحقيقة عند تطبيق نموذج رياضي.

التغير العكسي — Inverse Variation

عمل تعاوني

استصلاح الأراضي: يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل 160 يوم عمل. ويمكن لفريق مكوّن من 20 شابّاً أن يكملوا هذا العمل في 8 أيام؛ فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

(أ) كم يوما يتطلب العمل إذا كان الفريق مكوناً من 40 شخصاً؟

(ب) أكمل الجدول الآتي:

عدد الفريق (x)	عدد أيام العمل (y)	مجمل أيام العمل ($x\,y$)
2	80	160
5	32	160
8	...	...
...	16	...
20	8	160
40	...	...

الشكل المبين يمثل العلاقة بين y و x، في هذا النوع من التغير:

(ج) صف ما يحدث لزمن العمل (y) عندما يزداد عدد الفريق (x).

(د) ماذا تلاحظ على ناتج الضرب xy في هذا النوع من التغير؟

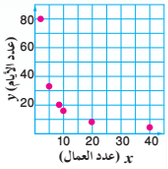
دعنا نفكر ونتناقش

التغير العكسي

إذا تغيرت كمية y مع تغير كمية أخرى x بحيث كان ناتج ضرب الكميتين ثابتاً، فإن هذا التغير يسمى تغيراً عكسيّاً، ويسمى ناتج الضرب xy ثابت التغير، ويرمز لذلك بالرمز $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$ حيث $k \neq 0$، $x \neq 0$.

ففي المثال التوضيحي السابق نجد أن $xy = 160$ أي $y = \frac{160}{x}$ حيث ثابت التغير هنا هو 160.

سوف تتعلم
* التغير العكسي
* ثابت التغير العكسي
* دالة التغير العكسي
* مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي



١٩

تدريب

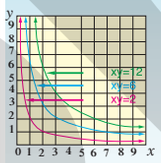
(أ) أكمل الجدول الآتي الذي يعبر عن التغير العكسي $xy = 100$.

x	1	2	4	5	10	20	50	100
y	100	...	...	...	...	...		1

(ب) كيف تتغير قيم y مع زيادة قيم x في هذا الجدول؟

اذكر ثابت التغير في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانية المبينة.

اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.



ملاحظة:

استخدم التناسب في التعبير عن التغير العكسي.

إذا كان (x_1, y_1)، (x_2, y_2) زوجين مرتبين في تغير عكسي $y = \frac{k}{x}$ فإن $x_1 y_1 = x_2 y_2$

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$.

ففي مثال العمل التعاوني السابق نجد أن $32 \times 5 = 80 \times 2$

ومن ذلك نرى أن $\frac{5}{2} = \frac{80}{32}$، $\frac{32}{2} = \frac{80}{5}$، $\frac{32}{80} = \frac{2}{5}$، ...

مثال (١) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاجه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغير عكسيّاً مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز.

"فاطمة" وزنها 51 kg وتجلس على بعد 2.5 m من نقطة الارتكاز. أين يجلس "مسعود" الذي وزنه 75 kg ليحدث التوازن.

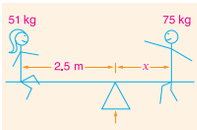
الحل

من توازن الرافعة: الوزن × المسافة = ثابت

إذن $51 \times 2.5 = 75 \times x$

إذن $x = \frac{2.5 \times 51}{75} = 1.7$

أي أن "مسعوداً" يجلس على مسافة 1.7 m من نقطة الارتكاز.



٢٠

Draft

في التدريب رقم ١ صفحة ٢٠: ساعد كل طالب على قراءة السؤال أمام رفيقه ثم دعهم يفكرون ما المتغيرات التي سيختارونها وكيف سيربطون بين هذه المتغيرات.

– اسأل الطلاب إذا كان بإمكانهم إعطاء عينة يمكن أن نستخدم فيها معادلة تغير طردي أو تغير عكسي.

– صف أوجه الشبه والاختلاف بين التغير الطردي والتغير العكسي مستعيناً بالمعادلات والرسوم البيانية.

– اطلب إلى طلابك إعطاء أمثلة أو مواقف تتضمن متغيرين تمثل العلاقة بينهما تغيراً عكسيّاً.

– ضع على لوحة ملصقاً يوضح العلاقتين:

$y = \frac{k}{x}$ التغير العكسي (k ثابت)،

$y = ax$ التغير الطردي (a ثابت)

وبجانب كل من العلاقتين الشكل البياني الممثل لها.

– اطلب إلى الطلاب التعبير بصيغ أخرى عن العلاقتين: التغير العكسي: $xy = k$

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1} \Rightarrow x_1y_1 = x_2y_2$$

التغير الطردي: $\frac{y}{x} = a$

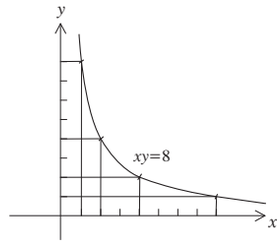
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow y_1x_2 = y_2x_1$$

وحقق ذلك في الأمثلة والتمارين، مع المقارنة بين نوعي التغير.

– بين الحين والآخر، دع الطلاب يقدرون النتائج عقليّاً قبل إجراء العمليات الحسابية بدقة – كون حسّاً رياضيّاً عند طلابك.

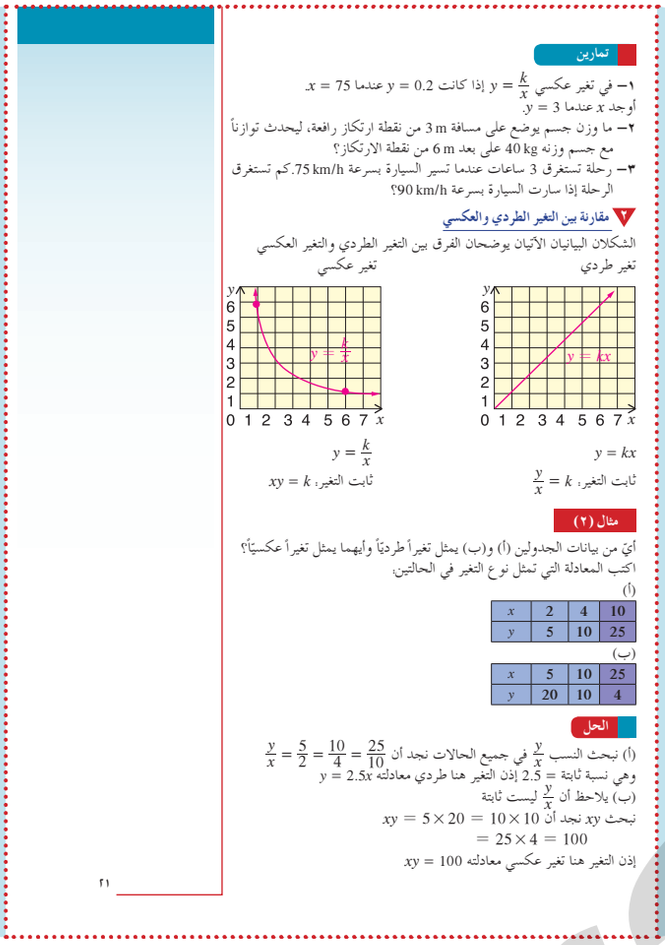
– استخدم الجدول والشكل البياني والمعادلة للتعبير عن التغير، ودع الطلاب يستنتجون إحدى الصيغ من صيغة أخرى.

تفكير: اسأل الطلاب كيف يمكنهم أن يصفوا الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي.



دعنا نفكر ونتناقش:

ساعد الطلاب على فهم أن k هي كمية ثابتة في المعادلة $y = \frac{k}{x}$. أرشدهم إلى أنه إذا تغيرت x فإن y سوف تتغير. إذا زادت x تتناقص y وإذا تناقصت x تتزايد y بحيث يبقى ناتج الضرب $x \cdot y$ ثابتاً.



تمارين

١– في تغير عكسي $y = \frac{k}{x}$ إذا كانت $y = 0.2$ عندما $x = 75$.
أوجد x عندما $y = 3$.

٢– ما وزن جسم يوضع على مسافة 3 m من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازناً مع جسم وزنه 40 kg على بعد 6 m من نقطة الارتكاز؟

٣– رحلة تستغرق 3 ساعات عندما تسير السيارة بسرعة 75 km/h.كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة 90 km/h؟

مقارنة بين التغير الطردي والعكسي

الشكلان البيانيان الآتيان يوضحان الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي

تغير طردي

$y = kx$

ثابت التغير: $\frac{y}{x} = k$

تغير عكسي

$y = \frac{k}{x}$

ثابت التغير: $xy = k$

مثال (٢)

أيّ من بيانات الجدولين (أ) و(ب) يمثل تغيراً طرديّاً وأيهما يمثل تغيراً عكسيّاً؟ اكتب المعادلة التي تمثل نوع التغير في الحالتين:

(أ)

x	2	4	10
y	5	10	25

(ب)

x	5	10	25
y	20	10	4

الحل

(أ) نبحث النسب $\frac{y}{x}$ في جميع الحالات نجد أن $\frac{y}{x} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{25}{10}$
وهي نسبة ثابتة = 2.5 إذن التغير هنا طردي معادلته $y = 2.5x$

(ب) يلاحظ أن $\frac{y}{x}$ ليست ثابتة
نبحث xy نجد أن $xy = 5 \times 20 = 10 \times 10$
$= 25 \times 4 = 100$
إذن التغير هنا تغير عكسي معادلته $xy = 100$

٢١

Draft

تواصل شفهي: اطلب إلى الطلاب تنفيذ الرسم البياني للمعادلة $xy = 8$ على اللوح بواسطة النقاط ذات الأزواج المرتبة مثلاً: (1, 8)، (2, 4)، (8, 1)، (4, 2)

٦. الربط:

– ناقش مع الطلاب أمثلة للتغير العكسي والطردي في ما يدرسونه في العلوم الأخرى. نبه إلى القانون الفيزيائي: ثابت = $\frac{P \times V}{T}$، في العلاقة بين الحجم والضغط في حالة ثبوت درجة الحرارة والعلاقة بين الحجم ودرجة الحرارة في حالة ثبوت الضغط. استفد مما هو موجود بكتب العلوم.

– استخدم نماذج مبسطة للرافعة (الأرجوحة) كما في مثال (١) ودع الطلاب يجربون العلاقة بأنفسهم باستخدام مسطرة تستند على قلم (مثلاً).

٧. أخطاء شائعة:

لا يستطيع الطلاب في بعض المسائل التمييز بين التغير الطردي والتغير العكسي وبين التغير الذي لا يمثل تغيراً طردياً أو عكسياً. دع الطلاب يحددون كلاً من التغيرين.

٨. التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمرينين ١٠ و١١ في الصفحة ٢٣ للتأكد من فهمهم التغير العكسي وقدرتهم على التمييز بين التغير الطردي والتغير العكسي.

٩. مسألة اليوم:

حوض أزهار له شكل مثلث متساوي الأضلاع محيطه 32.7 m. ما المبلغ الذي سندفعه إذا أردنا بناء سياج على ضلع واحد علماً أن كلفة المتر الواحد من السياج 5 ليرات؟ (54.5 ليرة)

١٠. إجابات وحلول:

حلول التدريب ص ٢٠

(أ) أكمل الجدول 100، 50، 25، ....

قيم y تنقص مع زيادة قيم x بحيث $xy = 100$ دائماً.

(ب) (3, 4)، (2, 6)، (6, 2)، $xy = 12$

(3, 2)، (2, 3)، (1, 6)، $xy = 6$

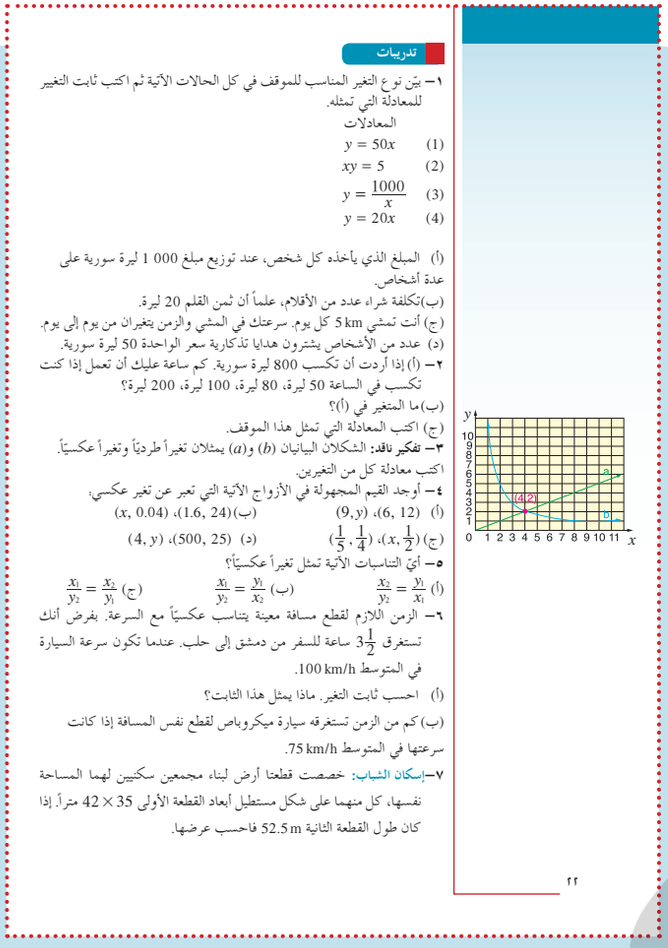
(4, $\frac{1}{2}$)، (2, 1)، (1, 2)، $xy = 2$

حلول تمارين ص ٢١

(١) $y = \frac{k}{x} \Rightarrow xy = k \Rightarrow 0.2 \times 75 = k = 15$

$xy = 15 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

حل آخر: بالتناسب $\frac{0.2}{x} = \frac{3}{75}$ ...



تدريبات

١– بيّن نوع التغير المناسب للموقف في كل الحالات الآتية ثم اكتب ثابت التغيير للمعادلة التي تمثله.

المعادلات

(1) $y = 50x$

(2) $xy = 5$

(3) $y = \frac{1000}{x}$

(4) $y = 20x$

(أ) المبلغ الذي يأخذه كل شخص، عند توزيع مبلغ 1 000 ليرة سورية على عدة أشخاص.

(ب) تكلفة شراء عدد من الأقلام، علماً أن ثمن القلم 20 ليرة.

(ج) أنت تمشي 5 km كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيران من يوم إلى يوم.

(د) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة 50 ليرة سورية.

٢– (أ) إذا أردت أن تكسب 800 ليرة سورية. كم ساعة عليك أن تعمل إذا كنت تكسب في الساعة 50 ليرة، 80 ليرة، 100 ليرة، 200 ليرة؟

(ب) ما المتغير في (أ)؟

(ج) اكتب المعادلة التي تمثل هذا الموقف.

٣– **تفكير ناقد:** الشكلان البيانيان (b) و(a) يمثلان تغيراً طردياً وتغيراً عكسياً. اكتب معادلة كل من التغيرين.

٤– أوجد القيم المجهولة في الأزواج الآتية التي تعبر عن تغير عكسي:

(أ) (6, 12)، $(9, y)$ (ب) (1.6, 24)، $(x, 0.04)$

(ج) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$، $(x, \frac{1}{2})$ (د) (500, 25)، $(4, y)$

٥– أيّ التناسبات الآتية تمثل تغيراً عكسياً؟

(أ) $\frac{x_2}{y_2} = \frac{y_1}{x_1}$ (ب) $\frac{x_1}{y_2} = \frac{y_1}{x_2}$ (ج) $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$

٦– الزمن اللازم لقطع مسافة معينة يتناسب عكسياً مع السرعة. بفرض أنك تستغرق $3\frac{1}{2}$ ساعة للسفر من دمشق إلى حلب. عندما تكون سرعة السيارة في المتوسط 100 km/h.

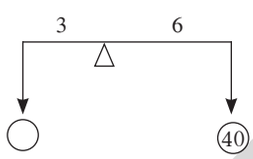
(أ) احسب ثابت التغير. ماذا يمثل هذا الثابت؟

(ب) كم من الزمن تستغرقه سيارة ميكروباص لقطع نفس المسافة إذا كانت سرعتها في المتوسط 75 km/h.

٧– **إسكان الشباب:** خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل أبعاد القطعة الأولى 35×42 متراً. إذا كان طول القطعة الثانية 52.5 m فاحسب عرضها.

٢٢

(٢) اطلب إلى الطالب أن يرسم شكلاً يمثل المسألة $W = 80$ kg



(٣) $vn = k$

$90 \times n = 75 \times 3$

$n = 2.5$ (ساعة)

اسأل عن حل بالتناسب.

حلول التدريبات ص ٢٢، ٢٣

(١) (أ) $y = \frac{1000}{x}$ عكسي

(ب) $y = 20x$ طردي

(ج) $xy = 5$ عكسي

(د) $y = 50x$ طردي

(٢) (أ) عدد الساعات × أجر الساعة = 800 تغير عكسي

(50, 16)، (80, 10)، (100, 8)، (200, 4)

(٣) التغير الطردي (المار بنقطة الأصل) (a): $y = \frac{1}{2}x$

التغير العكسي (b): $xy = 8$

(٤) (أ) 8 (ب) 960 (ج) $\frac{1}{10}$ (د) 3125

(٥) (ج) تغير عكسي

Draft

(٦) (أ) $K = 100 \times 3.5 = 350$

(ب) $75 \times t = 350$

$$t = \frac{350}{75} = 4\frac{2}{3}$$

فالزمن اللازم هو أربع ساعات وأربعون دقيقة.

(٧) 28

(٨) 4 أيام

(٩) (أ) طردي (ب) عكسي

(ج) عكسي (د) طردي

(هـ) و (و) و (ز) لا طردي ولا عكسي

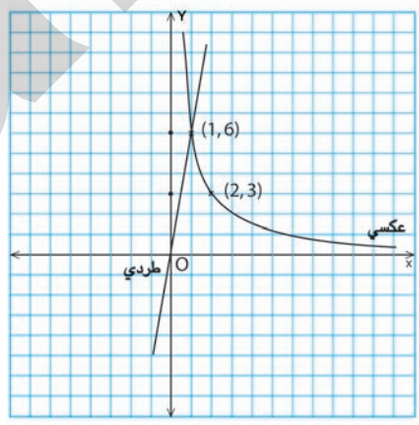
(١٠) (أ) y تتضاعف (ب) تنخفض إلى النصف

مثال: $xy = 80$

عندما $x = 5$ نجد أن $y = 16$.

عندما $x = 10$ نجد أن $y = 8$.

(١١) مثلاً: $y = 6x$، $y = \frac{6}{x}$ الثابت 6



مشروع ص ٢٣

$567x = 420 \times 523$

أوجد قيمة x المناظرة لكل تردد، ودع الطالب يستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النواتج.

٨– **المدرسة المنتجة:** إذا كان فريق من 4 طلاب يمكنهم طلاء صفوف المدرسة في 6 أيام، كم يوماً يلزم للقيام بالعمل نفسه إذا كان الفريق مكوناً من 6 طلاب؟

٩– أي من القوانين الآتية يمثل تغيراً طردياً؟ وأيها تغيراً عكسياً؟ وأيها غير ذلك؟

(أ) علاقة محيط مثلث متساوي الأضلاع بطول الضلع:
(المحيط $= P$)، (طول الضلع $= l$)

(ب) علاقة طول مستطيل بعرضه إذا كانت المساحة 24 وحدة مربعة:
(الطول × العرض $= 24$)

(ج) $t = \frac{150}{v}$ حيث الزمن (t) اللازم لقطع مسافة 150 km بسرعة $v\ km/h$

(د) يعطي محيط دائرة طول نصف قطرها r بالعلاقة: $P = 2\pi r$

(هـ) علاقة درجة الحرارة المئوية بدرجة الحرارة الفهرنهيتية:
$F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$

(و) $y = 2x + 5$

(ز) $y = \frac{3}{x} - 4$

١٠– **أكمل:**

(أ) إذا كان $y = kx$ وتضاعفت قيمة x فإن y ...

(ب) إذا كان $y = \frac{k}{x}$ وتضاعفت قيمة x فإن قيمة y ...

١١– اكتب معادلة لتغير طردي وأخرى لتغير عكسي لهما ثابت التغير نفسه، ثم مثل بيانياً.

مشروع

الأوتار في الآلات الموسيقية

لإحداث طبقات مختلفة في السلم الموسيقي تستخدم القيثارة أو القانون، وتردد اهتزازات الوتر (f) يتغير عكسياً مع طول الوتر (l). أوجد أطوال الوتر للسلم الموسيقي المبين بالجدول.

الطبقة	C	D	E	F	G	A	B	C
التردد (الدورة/ث)	523	567	659	698	784	880	988	1046
طول الوتر (mm)	420							

٢٣

Draft

المتتاليات (الأنماط الرياضية)
Sequences (Mathematical Patterns)

كتاب الطالب من صفحة ٢٤ إلى صفحة ٢٧

١. الأهداف:

◄ كتابة قاعدة المتتتالية.

◄ حساب الحد النوني في (a_n)

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

المتتابعة – الحد النوني.

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة.

٤. التمهيد:

اطلب إلى الطلاب متابعة الأنماط التالية إلى الحد السابع:

$2, 4, 6, 8, \ldots$

$5, 10, 15, 20, \ldots$

■ أعط أمثلة لأنماط واطلب مواقف يعبر عنها النمط.

لاحظ مثلاً النمط $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ كيف تحصل على الحد التالي؟ (يساوي مجموع الحدين السابقين له.)

■ أعط نماذج لأنماط بصرية كالآتي:

اكتشف النمط ثم أكمل. ○△□○△□

٥. التدريس:

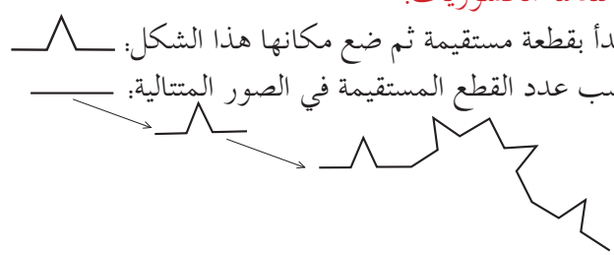
ابدأ العمل التعاوني الوارد في كتاب الطالب.

تناقش إجابات المجموعات للوصول إلى الصيغة الصحيحة.

في هندسة الكسوريات:

* ابدأ بقطعة مستقيمة ثم ضع مكانها هذا الشكل:

احسب عدد القطع المستقيمة في الصور المتتالية:



* ابدأ بالمثلث المتساوي الأضلاع △ ثم بدل كل مثلث بثلاثة مثلثات متساوية الأضلاع △△△ وهكذا ...

أكمل الرسوم إلى الحد الرابع. ما هو عدد المثلثات؟

فكر متطور:

* تريد بناء برج من أوراق اللعب المزركشة فبدأت بالطابق الأول من ورقتين. في الطابق الثاني أصبح مجموع الأوراق المستخدمة 7 وهكذا. فنحصل على الجدول التالي:

المتتاليات (الأنماط الرياضية) Sequences (Mathematical Patterns)

سوف تتعلم
* النمط الرياضي
* المتتالية الحقيقية
* الحدّ النوني للمتتالية

عمل تعاوني

ما هو أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب مع الآخر هاتفياً؟ (على اعتبار أن كل طالبين في المجموعة تجري بينهما مكالمة) ثم أجب عن الأسئلة الآتية باستخدام الشكل المجاور:

كم مكالمة يمكن أن تكون بين طالبين؟

كم مكالمة يمكن أن تكون بين 3 طلاب، 4 طلاب؟

استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين 5 طلاب.

ثم أكمل الجدول الآتي:

عدد الأشخاص	1	2	3	4	5
عدد الاتصالات	0	1			

النمط الرياضي: أي من الصيغ الآتية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

$m = n(n-1) - 5 \quad m = 2n - 3$

$m = \frac{n(n-1)}{2}$

حيث n عدد الطلاب، m عدد المكالمات.

أوجد عدد المكالمات m اللازمة لمجموعة الطلاب مستخدماً الصيغة الصحيحة:

(أ) الموجودة في الشكل.

(ب) الموجودة في صفك.

٢٤

الطوابق	1	2	3	4	5	6	7	8
عدد الأوراق المستخدمة	2	7	15	26				

أوجد النمط ثم أكمل الجدول:

$7 - 2 = 5$

$15 - 7 = 8$

$26 - 15 = 11$

فكر متطور: التتابع الرياضي عبارة عن تتابع من الأعداد أو الرموز يتبع قاعدة معينة فالأعداد:

$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ تمثل نمطاً قاعدته

هي: $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$

فمثلاً قيمة الحد العاشر: $a_{10} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

وتعلم أن: $a_n = a + (n-1)d$

وضح للطلاب أن النمط (1) يمكن أن ينتج من المجاميع المتتالية لحدود متتابعة الأعداد $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

حيث: $s_1 = 0$

$s_2 = 0 + 1 = 1$

$s_3 = 0 + 1 + 2 = 3$

$s_4 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

Draft

ويمكن أن يمثل هذا النمط بأشكال هندسية هي أشكال الأعداد المثلثية:

1 3 6 10

– اطلب إلى الطلاب أن يعطوا أمثلة لأنماط أخرى من عندهم.

٦. أخطاء متوقعة:

مثال من الهندسة: من المحتمل أن يُخطئ الطلاب بين الأعداد في المتتابعتين (1, 2, 3, 4, ...) و(4, 8, 12, 16, ...).

مدّ يد المساعدة وأوضح لهم أن الأعداد في السطر الثاني تمثل متتابعة والأعداد في السطر الثالث تُمثّل متتابعة أخرى.

٧. الربط:

أفكار مساعدة:

مثال إضافي على المثال(١):

اشترى راشد سيارة ودفع ثمنها 600 000 ليرة سورية. تخسر السيارة 10 بالمئة من قيمتها كل سنة. أوجد قيمة السيارة بعد مرور 5 سنوات على شرائها. (35429.4 ليرة سورية)

الربط مع الحياة اليومية للطالب:

في مثال (١) (الكرة) دع الطلاب يمثلون نمط تتابع ارتفاعات الكرة (المرنة) هندسيّاً: مثلاً

اسأل بعد كم نطة (ارتداد) تتوقف الكرة عن الارتفاع نظريّاً من الناحية الرياضية ومن الناحية العملية (إذا أهملنا الارتداد لأقل من 10 cm).

– في متتاليات المربع:

طول ضلع المربع: $1, 2, 3, 4, ..., n$ ...

محيط المربع: $4, 8, 12, 16, ..., 4n$ ...

مساحة المربع: $1, 4, 9, 16, ..., n^2$

– اشرح المقصود بمجال المتتالية الحقيقية IN أو مجموعة جزئية منه والتي تدل على رتب الحدود، المجال المقابل ℝ والمدى الذي هو قيم الحدود المتتالية – اربط ذلك بالأمثلة المعطاة.

– لاحظ استخدام الرمز (a_n) للمتتالية وتعريف الحد a_n.

مثال (١)

كرة سقطت من ارتفاع 10 m عن سطح الأرض وترتفع إلى 85% من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض.
احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.

الحل

الارتفاع الأصلي 10 m.
بعد الاصطدام الأول بالأرض يكون ارتفاع الكرة $10 \times 0.85 = 8.5$ m.
بعد الاصطدام الثاني بالأرض يكون ارتفاع الكرة $8.5 \times 0.85 = 7.225$ m.
بعد الاصطدام الثالث بالأرض يكون ارتفاع الكرة
$7.225 \times 0.85 = 6.141$ m.
بعد الاصطدام الرابع بالأرض يكون ارتفاع الكرة
$6.141 \times 0.85 = 5.220$ m.
فيكون الارتفاع 5.22 m بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.
لاحظ تتابع الارتفاعات ... 8.5, 7.225, 6.141, 5.220,

تمهيد

اعتبر متتالية الأعداد:

a_n	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
...n حداً	10	8	6	4	2

2 تسمى الحد الأول في المتتالية ويرمز له بالرمز a_1.
4 تسمى الحد الثاني في المتتالية ويرمز له بالرمز a_2.
6 تسمى الحد الثالث في المتتالية ويرمز له بالرمز a_3.
ويرمز للحد النوني في المتتالية بالرمز a_n حيث n هي من المجموعة $\mathbb{N}^*$ ويمثل الحد النوني في المتتالية.
اكتب صيغة النمط الذي يمثل المتتالية السابقة. هل يمكنك إيجاد الحدود الثلاثة الآتية؟
*اكتب الحد التاسع والحد الخامس عشر.

مسألة للتفكير

في المتتالية (a_n): $a_1 = 10 ; a_n = 0.85a_{n-1}$

هل يمكنك كتابة الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (a_n)؟

مثال من الهندسة

ادرس الجدول الآتي.
المتتالية التي تمثل أطوال أضلاع المربع
(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ...)

٢٥

٨. التقويم:

* أوجد النمط في هذه الأعداد المتتالية:

1, 3, 6, 10, 15

أكمل الأعداد بزيادة خمسة أعداد بعد 15،

$2 + 1 = 3$؛ $3 + 3 = 6$؛ $4 + 6 = 10$؛ $5 + 10 = 15$

إذاً

$28 + 8 = 36$ $\quad 21 + 7 = 28$؛ $\quad 15 + 6 = 21$؛

$45 + 10 = 55$ $\quad 36 + 9 = 45$؛

٩. مسألة اليوم:

في شهر (آب) قبض باسل راتبه وقدره 6 000 ليرة سورية. وفي شهر (أيلول) زاد راتبه إلى 6 600 ليرة سورية.

(أ) ما النسبة المئوية للزيادة التي حصل عليها؟ (10%)

(ب) لنفترض أنه في شهر (تشرين الثاني) حصل على الزيادة المئوية نفسها عن راتبه في شهر (أيلول) فما المبلغ الذي قبضه؟ (7 200 ليرة سورية).

Draft

١٠. إجابات وحلول:

حلول التمارين ص ٢٦، ٢٧

تدريب

(١)

(أ) تتزايد الحدود بمقدار 3 ويكون $a_n - a_{n-1} = 3, a_6 = 83$

(ب) $a_n - a_{n-1} = 3, a_6 = 16$

(ج) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -2, a_6 = -128$

(د) $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}, a_6 = \frac{1}{64}$

(هـ) $a_n = na_{n-1}, a_6 = 6 \times a_5 = 6 \times 120 = 720$

(و) $a_n = a_{n-1} + (n+1), a_6 = 18 + 7 = 25$

(٢)

(أ) $a_1 = 3, a_n = 3n$

$(a_{12} = 3 \times 12 = 36)$

(ب) $a_1 = 4,\ a_n = 4n, a_{12} = 48$

(ج) $a_1 = 4,\ a_n = n + 3, a_{12} = 15$

(د) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{1+n}, a_{12} = \frac{1}{13}$

(٣)

(أ) $5, 10, 15, 20, 25$

(ب) $3, 9, 21, 45, 93$

(ج) $\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}, \frac{19}{12}, \frac{107}{60}$

(د) $0, -9, -16, -21, -24$

(هـ) $10, 6, 3, 1, 0$

(٤) $a_5 = 15$

صيغة $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة للأعداد المثلثة بالتعويض نحصل على المتتابعة نفسها

$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

الحدود	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
طول ضلع المربع	1	2	3	4	5	6	7	...
محيط	4	8	12	16	20	...	...	...

لاحظ واكتب a_{35}، a_{90}

*المتتالية التي تمثل محيط المربع

(4, 8, 12, 16, 20 ...)

فإن $a_7 = 4 \times 7 = 28$، $a_{35} = \ldots \times \ldots$

$a_{39} = \ldots \times \ldots$ ، $a_{90} = \ldots \times \ldots$

أوجد مساحة المربع المناظرة لطول ضلعه في الجدول السابق.

اكتب متتالية مساحة المربعات. استنتج a_{25}، a_{35} في المتتاليات السابقة.

مسألة للتفكير

في المثال السابق:

اكتب a_n لمتتالية أطوال أضلاع المربع بدلالة الحدّ السابق.

a_n لمتتالية محيطات المربع بدلالة الحدّ السابق.

a_n لمتتالية مساحات المربع بدلالة الحدّ السابق.

تعريف المتتالية الحقيقية

المتتالية الحقيقية دالة (تابع) منطلقها أو مجموعة تعريفها الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}^*$ ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مسألة للتفكير

إذا علمت أن $a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 3$

أوجد a_4، a_5

تدريب

١– اكتشف النمط ثم اكتب الحدّ التالي:

(أ) 68, 71, 74, 77, 80, ...

(ب) 1, 4, 7, 10, 13, ...

(ج) 4, −8, 16, −32, 64, ...

(د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

(هـ) 1, 2, 6, 24, 120, ...

(و) 0, 3, 7, 12, 18, ...

٢– اكتب الحد النوني في المتتالية حسب النمط واستنتج a_{12}.

(أ) 3, 6, 9, 12, 15, ...

(ب) 4, 8, 12, 16, 20, ...

(ج) 4, 5, 6, 7, 8 ...

(د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

٣– اكتب الحدود الخمسة الأولى إذا عُلم:

(أ) $a_n = 5n$

(ب) $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} + 3$

(ج) $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}$

(د) $a_n = (n-5)(n=5)$

(هـ) $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$

٤– تدريب في الهندسة (الأعداد المثلثة)

a_3 a_2 a_1

1, 3, 6 تمثل الحدود الثلاثة الأولى من الأعداد المثلثة.

* أوجد الحد الخامس من متتالية الأعداد المثلثة

* هل الصيغة $a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ هي صيغة صحيحة للأعداد المثلثة؟

كيف تعرف ذلك؟

ملاحظات:

١– ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة، فمثلاً المتتالية (2, 2, 2, ...) حيث $a_n = 2$ جميع حدودها متساوية وتساوي عدداً ثابتاً 2. وهذه تسمى متتالية ثابتة.

٢– يستخدم الرمز (a_n) للتعبير عن المتتالية ويختلف عن الرمز $\{a_n\}$ فهو للتعبير عن المجموعة حيث إن حدود المتتالية يمكن أن تتكرر، أمّا عناصر المجموعة فلا تتكرر.

٣– عند كتابة عناصر المجموعة لا يراعى ترتيب عناصرها، فمثلاً $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$، أمّا بالنسبة للمتتالية فإن ترتيب حدودها هام، فالمتتالية (6, 3, 9, ...) تختلف عن المتتالية (9, 6, 3, ...).

Draft

المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

كتاب الطالب من صفحة ٢٨ إلى صفحة ٣٥

١. الأهداف:

- ◄ استكشاف تناسق وتسلسل المتتاليات الحسابية
- ◄ إيجاد الحد النوني للمتتالية الحسابية (a_n)
- ◄ إيجاد الأوساط الحسابية
- ◄ إيجاد مجموع عدد من حدود متتالية حسابية

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

المتتالية الحسابية – أساس المتتالية – حدود المتتالية

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية.

٤. التمهيد:

- ابدأ بمسألة كما في سؤال (٩) من تمارين ومسائل ص ٣١ وناقش الطلاب.
- يحتاج الطلاب هنا إلى بعض المهارات المسبقة خاصة حل معادلتين آنيتين كما في الأسئلة المعطاة في التمرين؛ لذا يفضل تذكير الطلاب بهذه المهارة.
- المقصود بالحد النوني هو الحد العام، والذي تكتب قيمته بدلالة رتبة الحد ولتكن n ومن هنا يرمز إليه بالرمز a_n.
- وضح الفرق بين رتبة الحد وقيمة الحد.

٥. التدريس:

كلف المجموعات بإنجاز عمل تعاوني وتدريب.

ركز مع الطلاب على أن الفرق بين كل حد والحد السابق له هو مقدار ثابت.

قراءة ومناقشة فقرة: دعنا نفكر ونناقش مع كل الطلاب.

أوضح للطلاب أن الوسط الحسابي بين عددين a, c هو الحد الثاني في متتالية حسابية a, b, c.

– عند عرض مجموع متتالية حسابية يمكنك أن تذكر قصة الرياضي جاوس عندما كان طفلاً في الصف الأول وطلب المدرس إلى الصف أن يحسبوا

$1 + 2 + 3 + ... + 10$ ولاحظ جاوس سريعاً أن

$1 + 10 = 11, 2 + 9 = 11, ..., 3 + 8 = 11$

فأجاب بأن المجموع: $11 \times 5 = 55$ يقابل

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اطلب إليهم إيجاد مجموع

$1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ بالطريقة نفسها.

– اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة حياتية لمتتاليات حسابية.

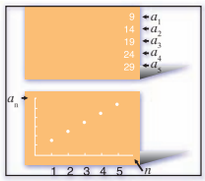
المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

سوف تتعلم
* المتتالية الحسابية وأساسها
* الحد النوني للمتتالية الحسابية
* الأوساط الحسابية
* مجموع (n) حداً من حدود المتتالية الحسابية

عمل تعاوني

أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة.
اكتب صيغة للحد السادس مستخدماً الحد الخامس.
مثل بيانياً حدود المتتالية.

تدريب



كون متتاليتين إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح عدد ثابت من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.
في المتتالية (9, 14, 19, 24, 29, ...)
أوجد الفرق بين حدين متتاليين تجده مقدراً ثابتاً في هذه الحالة سنسمي المتتالية بمتتالية حسابية.
أوجد الفرق بين حدين متتاليين في كل متتالية حصلت عليها. ماذا تلاحظ؟
في المتتالية الحسابية سنسمي الفرق بين حدين متتاليين بأساس المتتالية الحسابية ونرمز له بالرمز d.
ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين a_n و n، للمتتالية الأصلية والتي حصلت عليها في التدريب السابق. قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

مثال (١)

في المتتالية (6, 12, 18, 24, ...)
نجد أن $12 - 6 = 18 - 12 = 24 - 18 = 6$
أي أن الفرق بين كل حد وسابقه يساوي 6 لاحظ أن $d = 6$ من الواضح أن هذه متتالية حسابية.

دعنا نفكر ونناقش

المتتالية (2, 5, 7, 12, ...)
المتتالية (48, 45, 42, 39, ...)
هل هاتان المتتاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك أوجد أساس كل منها.

تعريف

تسمى المتتالية (a_n) متتالية حسابية إذا كان المقدار $a_{n+1} - a_n$ ثابتاً لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ ويسمى العدد الثابت أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d.

٢٨

وعلى ذلك $a_{n+1} - a_n = d$ أو $a_{n+1} = a_n + d$ أي أنه يمكن الحصول على أيّ حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة d إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال (٢)

إذا كان $a_1 = 5, d = 7$
اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية.

الحل

$a_1 = 5$
$a_2 = a_1 + d = 5 + 7 = 12$
$a_3 = a_2 + d = 12 + 7 = 19$
الحدود الخمسة الآتية هي 5, 12, 19, 26, 33, 40, ...
وتكون المتتالية $(a_n) = (5, 12, 19, 26, 33, 40, ...)$

الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية (a_n) يساوي a أي $a_1 = a$ وأساس المتتالية يساوي d واعتبرنا الحد النوني هو a_n
فمن تعريف المتتالية الحسابية:
$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$
$a_4 = a + 3d$
لاحظ النمط الرياضي واكتب a_9 ، a_{15}
وبصفة عامة: $a_n = a + (n - 1)d$
لكل n هي عنصر في $\mathbb{N}^*$
ولكن إذا كان الحد المعروف هو a_k فيكون $a_n = a_k + (n - k)d$
ملاحظة هامة: n تمثل رتبة الحد a_n أمّا a_n فتمثل قيمة الحد، فمثلاً $a_7 = 35$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي 35.

مثال (١)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (5, 7, 9, ...)

الحل

$a = 5 , d = 7 - 5 = 2$
$a_{10} = a + 9d$
$a_{10} = 5 + 9 \times 2 = 23$
$a_{100} = a + 99d = 5 + 99 \times 2 = 203$
$a_{100} = 203$

٢٩

Draft

لكي يثبت الطالب أن متتالية ما حسابية يكفي إثبات أن $a_n - a_{n-1}$ تساوي مقداراً ثابتاً. ولإيجاد متتابعة حسابية يتطلب الحل إيجاد حدها الأول a_1 وأساسها d.

أفكار مساعدة:

مثال (١): ركز مع الطلاب على أنه إذا كان الفرق الثابت في المتتالية الحسابية هو عدد سالب فإن المتتالية تكون متناقصة. وفي الوقت نفسه إن المتتالية هي دالة مجالها الأعداد الطبيعة (IN).

اطلب إلى الطلاب البحث عن مساهمات العرب في مجال المتتاليات الحسابية.

٦. الربط:

تريد المشاركة في جمعية خيرية. رسم الاشتراك الأساسي في هذه الجمعية هو 1 100 ليرة سورية. يساهم كل عضو مشترك بمبلغ يزيد 35 ليرة شهريّاً عن الشهر الذي يسبقه. ما مجموع المبالغ التي ساهمت بها بعد 75 شهراً من اشتراكك؟

الحل: يتوجب عليك إيجاد a_{75} للمتتالية الحسابية:

$1135, 1170, 1205 \ldots$

لنأخذ القاعدة: $a_n = a_1 + (n-1)d$

حيث إن: $a_1 = 1135; n = 75; d = 35$

$$a_{75} = 1135 + (75-1)\times 35 = 3\,725$$

مثال (٢)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته 99 من المتتالية الحسابية (7, 9, 11, ...).

الحل

$a = 7, d = 2, a_n = 99$

$a_n = a + (n-1)d$

$99 = 7 + (n-1)\times 2$

$92 = (n-1)\times 2$

$n - 1 = 46$

$n = 47$

$n_{47} = 99$

مثال (٣)

في متتالية ما $a_n = 7n - 3$ لكل عنصر n في $\mathbb{N}^*$. أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل

$a_n = 7n - 3$

$a_{n+1} = 7\times(n+1) - 3 = 7n + 4$

$a_{n+1} - a_n = (7n+4) - (7n-3)$

$= 7$ (مقدار ثابت)

المتتالية (a_n) حيث $a_n = 7n - 3$ متتالية حسابية.

مثال (٤)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي 9 والحد الثامن يساوي 15 أوجد المتتالية.

الحل

(1) $a_5 = 9, a + 4d = 9$

(2) $a_8 = 15, a + 7d = 15$

بالطرح $3d = 6,\ d = 2$

من (1) $a + 8 = 9,\ a = 1$

المتتالية (1, 3, 5, 7, ...)

الحل بطريقة أخرى

$a_8 = a_5 + (8-5)d$

ومنها $d = 2$

ثم $a_5 = a_1 + (5-1)\times 2$

ومنها $a_1 = 1$

المتتالية (1, 3, 5, 7, ...)

تمارين

١– أوجد a_{32} من المتتالية الحسابية (34, 37, 40, 43, ...)

٢– أوجد a_{45} من المتتالية الحسابية (−9, −8.7, −8.4, −8.1, ...)

٣– أوجد a_{29} من المتتالية الحسابية (213, 201, 189, 177, ...)

٤– أوجد الحدود الناقصة من المتتاليات الحسابية الآتية:

(أ) $(3, \square, \square, 9, \ldots)$

(ب) $(5, \square, \square, \square, \square, -35, \ldots)$

(ج) $(-10, \square, \square, \square, -11.6, \square)$

(د) $\left(\frac{13}{5}, \square, \square, \square, \frac{37}{5}, \ldots\right)$

مثال (٢)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته 99 من المتتالية الحسابية (7, 9, 11, ...).

الحل

$a = 7, d = 2, a_n = 99$

$a_n = a + (n-1)d$

$99 = 7 + (n-1)\times 2$

$92 = (n-1)\times 2$

$n - 1 = 46$

$n = 47$

$n_{47} = 99$

مثال (٣)

في متتالية ما $a_n = 7n - 3$ لكل عنصر n في $\mathbb{N}^*$. أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل

$a_n = 7n - 3$

$a_{n+1} = 7\times(n+1) - 3 = 7n + 4$

$a_{n+1} - a_n = (7n+4) - (7n-3)$

$= 7$ (مقدار ثابت)

المتتالية (a_n) حيث $a_n = 7n - 3$ متتالية حسابية.

مثال (٤)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي 9 والحد الثامن يساوي 15 أوجد المتتالية.

الحل

(1) $a_5 = 9, a + 4d = 9$

(2) $a_8 = 15, a + 7d = 15$

بالطرح $3d = 6,\ d = 2$

من (1) $a + 8 = 9,\ a = 1$

المتتالية (1, 3, 5, 7, ...)

الحل بطريقة أخرى

$a_8 = a_5 + (8-5)d$

ومنها $d = 2$

ثم $a_5 = a_1 + (5-1)\times 2$

ومنها $a_1 = 1$

المتتالية (1, 3, 5, 7, ...)

تمارين

١– أوجد a_{32} من المتتالية الحسابية (34, 37, 40, 43, ...)

٢– أوجد a_{45} من المتتالية الحسابية (−9, −8.7, −8.4, −8.1, ...)

٣– أوجد a_{29} من المتتالية الحسابية (213, 201, 189, 177, ...)

٤– أوجد الحدود الناقصة من المتتاليات الحسابية الآتية:

(أ) $(3, \square, \square, 9, \ldots)$

(ب) $(5, \square, \square, \square, \square, -35, \ldots)$

(ج) $(-10, \square, \square, \square, -11.6, \square)$

(د) $\left(\frac{13}{5}, \square, \square, \square, \frac{37}{5}, \ldots\right)$

٣٠

٥– متتالية حسابية فيها $a_4 = 12$، $a_7 = 18$ أوجد المتتالية.

٦– متتالية حسابية فيها $a_5 = 14$، $a_8 = 20$ أوجد المتتالية.

٧– متتالية حسابية مجموع الحدين الثاني والثالث 43 وحدها الثامن = 5، أوجد المتتالية.

٨– متتالية حسابية مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها 36 ومجموع الحدين الخامس والسادس 66، أوجد المتتالية.

٩– يريد شخص يزن 130 kg إنقاص وزنه بمعدل كيلوغرامين كل شهر عن طريق نظام غذائي، بعد كم شهر سيكون وزنه 80 kg إذا استمر بنفس المعدّل؟ هل من الممكن أن ينعدم وزنه إذا استمر بهذا المعدل؟

١٠– أوجد الحد الذي رتبته 300 في المتتالية الحسابية التي حدها السادس 8 وحدها التاسع 41.

١١– أوجد عدد الحدود من الحد ذي القيمة −10 وحتى الحد ذي القيمة 14 من المتتالية (−10, −7, −4, ..., 14)

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت a, b, c متتالية حسابية حيث a, b, c هي عناصر من $\mathbb{R}$ فإن $b - a = c - b$.

$2b = a + c$

$b = \frac{a+c}{2}$

أي أن b هو الوسط الحسابي للعددين a، c.

مثال (١)

أوجد الحد الناقص من المتتالية الحسابية (84, ..., 110).

الحل

الحد الناقص هو الوسط الحسابي بين 84 و110.

الحد الناقص: $\frac{84+110}{2} = 97$ فيكون الحد الناقص هو 97.

وبصورة عامة

إذا كانت $(a, b, c, d, \ldots, y, z)$ متتالية حسابية فإن $(b, c, d, \ldots, y)$ تسمى أوساطاً حسابية للعددين (a, z).

مثال (٢)

أدخل 5 أوساط حسابية بين 23، 65

$(23, \square, \square, \square, \square, \square, 65, \ldots)$

الحل

$a_1 = 23$، $a_7 = 65$، عدد الحدود: $2 + 5 = 7$

$a_7 = a_1 + 6d$

$6d + 23 = 65$

٣١

Draft

٧. أخطاء متوقعة:

قد يجد الطلاب صعوبة في استخدام المتغيرات. مد يد المساعدة:

لنأخذ

$$d = 6, n - 1 = 25 - 1 = 24, n = 25, a_1 = 5$$

شجع الطلاب على استخدام كل متغير في موقعه الصحيح ضمن القاعدة $a_n = a_1 + (n - 1)d$

* وضح للطلاب أن حدود المتتالية الحسابية تقع على خط مستقيم واحد ولكنها لا تشكل خطاً مستقيماً. فمثلاً المتتالية الحسابية:

$5, 11, 17, 23, 29 \ldots$

لها: $a_n = 5 + (n - 1)6 = 6n - 1$ وهو الحد النوني. فجميع حدودها موجودة على المستقيم $y = 6x - 1$ (ارسم هذا المستقيم وحدد عليه النقاط $(n ; a_n)$.

٨. التقويم:

١) اكتب الحد الأول والحد النوني a_n بدلالة الحد للمتتالية:

$-1, -4, 2, 5, 8 \ldots$

$$(a_1 = -4; a_n = a_{n-1} + 3)$$

٢) اكتب الحد الأول والحد النوني a_n بدلالة الحد للمتتالية:

$-1, 1, 3, 5, 7 \ldots$

$$a_n = 7 + (n - 1)(-2)$$

٣) أوجد الوسط الحسابي للعددين 3 و12.(7.5)

٩. مسألة اليوم

أراد رجل حفر بئر إرتوازية في حديقة منزله. تبلغ كلفة حفر المتر الأول 40 ليرة سورية والمتر الثاني 50 ليرة سورية وهكذا دواليك أي بزيادة 10 ليرات سورية لكل متر جديد.

(١) أوجد كلفة حفر المتر العاشر. (130 ليرة سورية)

(٢) أوجد كلفة حفر الأمتار العشرة الأولى. (850 ليرة سورية)

(٣) رصد هذا الرجل 10 000 ليرة سورية للمشروع. كم متراً يستطيع أن يحفر؟ (41 متراً)

١٠. إجابات وحلول:

حلول التمارين والمسائل ص ٣٠، ٣١

(١) $a_{32} = 127$ (٢) $a_{45} = 4.2$ (٣) $a_{29} = -123$

(٤) (أ) يلاحظ أن $a_1 = 3$، $a_4 = 9$ ومنها $d = 2$ فالحدان الناقصان هما 5, 7

(ب) $a_1 = 5$ $a_6 = a_1 + 5d$، $d = -8$ الحدود الناقصة $-3, -11, -19, -27$

(ج) $a_1 = -10$ ... $a_5 = -11.6$؛ أما الحدود الناقصة فهي: $-10.4, -10.8, -11.2, -11.6, -12$

(د) الحدود الناقصة $\frac{31}{5}, 5, \frac{19}{5}$

$6d = 42$

$d = 7$

الأوساط هي 30، 37، 44، 51، 58

تدريب

١– أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين 3، 9–.

٢– أدخل خمسة أوساط حسابية بين 1، 13.

مجموع عدد معين n من حدود المتتالية الحسابية.

Sum of n Terms of an Arithmetic Sequence

عمل تعاوني

يقسم الصف لمجموعات صغيرة. المطلوب منك أن توجد المجموع (S) لحدود المتتالية الحسابية الآتية (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50)

$S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 + 50$ (1)

فكّر أن تجمع الحدود هكذا:

$S = 50 + 45 + 40 + 35 + 30 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5$ (2)

ماذا يحدث لو جمعنا (1) و(2)؟

$2S = 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55$

$2S = 55 \times 10$

$2S = 550$

$S = 275$

مجموع n من الحدود الأولى لمتتالية حسابية

مجموع n من حدود متتالية حسابية (a_n) يعطى بالقاعدة

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

حيث l هو الحد الأخير من المتتالية الحسابية وحدها الأول a وأساسها d وعدد حدودها n فيكون $a_n = l$

البرهان

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (l - 2d) + (l - d) + l$

$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a$

$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots + (a + l)(a + l) + (a + l)$

$2S_n = n(a + l)$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

وحيث إن $a_n = l$

فإن $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ (1)

لكن $a_n = a + (n - 1)d$

$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ (2)

القانون (1) يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (2) يعطي مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية الحد الأول والأساس (d).

٣٢

مثال (١)

أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 10 وحدها العشرون 500.

الحل

$n = 20, l = 500, a = 10$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_n = \frac{20}{2}(10 + 500) = 5100$

مثال (٢)

أوجد مجموع الستة عشر حداً الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول 15 وأساسها 7.

الحل

$n = 16, d = 7, a = 15$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_n = \frac{16}{2}[2 \times 15 + 15 \times d]$

$S_n = 8(30 + 105)$

$= 8 \times 135$

$= 1080$

مثال (٣)

كم حداً يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (10, 15, 20, ...) ليكون المجموع 450؟

الحل

$S_n = 450, d = 5, a = 10$

$\frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = S_n$

$\frac{n}{2}[20 + (n - 1) \times 5] = 450$

$\frac{n}{2}(15 + 5n) = 450$

$15n + 5n^2 = 900$

$n^2 + 3n - 180 = 0$

$(n + 15)(n - 12) = 0$

$n = 12$ أو $n = -15$

وحيث إن $n = -15$ مرفوض؛ $n = 12$ أي أن عدد حدود المتتالية هو 12.

٣٣

Draft

(٥) حل المعادلتين $a_1 + 3d = 12$ ، $a_1 + 6d = 18$
أكمل(نجد $a_1 = 6$ و $d = 2$)

(٦) $a_1 + 4d = 14$ ، $a_1 + 7d = 20$ أكمل ($a_1 = 6$
و $d = 2$)

(٧) $(a + d) + (a + 2d) = 43$ ، $a_1 + 7d = 5$
تعطي $a = 26$ ، $d = -3$ ...

$a + (a + d) + (a + 7d) = 36$

(٨) $a_1 = 6$ ، $d = 6$ ... أكمل $(a + 4d) + (a + 5d) = 66$

(٩) $a_1 = 130$ ، $d = -2$ ، $a_1 + (n - 1)d = 80$
تعطي $50 = -2(-n\ 1)$

$n = 26$

هذا مثال جيد للفرق بين الحل الرياضي (البحث) المجرد والواقع الحقيقي ... بطبيعة الحال لن ينعدم وزن الشخص مهما استمر في برنامجه الغذائي ... (احترس من الحمية!)

(١٠) $a_1 + 5d = 8$ ، $a_1 + 8d = 41$ نحصل على
$a_1 = -47$ ، $d = 11$ ، $a_{300} = -47 + 299 \times 11$

حلول تدريب ص ٣٢

(١) الأوساط الحسابية المطلوبة هي الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية 3 ، $\boxed{0}$ ، $\boxed{-3}$ ، $\boxed{-6}$ ، -9 كما سبق.

(٢) أوجد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية
13، $\boxed{11}$ ، $\boxed{9}$ ، $\boxed{7}$ ، $\boxed{5}$ ، $\boxed{3}$ ، 1 والحل في (١)، (٢) كما في التمارين السابقة لاحظ أن كل وسط في المتتالية الحسابية هو الوسط الحسابي (المتوسط) بين الحدين السابق والتالي له.

حلول التمارين ص ٣٥

في (١) و (٢) استخدم القانون:

$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ ، $s_{10} = 140$

$s_{20} = -360$

(٣) 10 (٤) $\frac{-85}{2}$

(٥) المتتابعة ... 15, 17, 19,

$S_{20} = 680$

(٦) $a_{25} = 73$

أعط الطلاب سؤالاً معكوساً: إذا كان في الصف الأول 73 صورة، فما أكبر عدد من الصفوف يمكن أن ترتب فيها الصور إذا كان كل صف يقل 3 صور عن سابقه؟

(٧) هذا سؤال جيد مطلوب فيه إيجاد حدود متتالية تتبع

مثال (٤)

إذا كان مجموع n حداً من حدود متتالية حسابية يتعين بالقاعدة $S_n = n(5 - n)$ فأوجد:
أولاً – المتتالية الحسابية.
ثانياً – الحد التاسع منها.
ثالثاً – عدد الحدود اللازم أخذها من المتتالية ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع -300.

الحل

أولاً: نضع $n = 1$ ، $S_1 = 1(5 - 1) = 4$
نضع $n = 2$ ، $S_2 = 2(5 - 2) = 6$
نضع $n = 3$ ، $S_3 = 3(5 - 3) = 6$
نضع $n = 4$ ، $S_4 = 4(5 - 4) = 4$

$a_1 = S_1 = 4$
$a_2 = S_2 - S_1 = 6 - 4 = 2$
$a_3 = S_3 - S_2 = 6 - 6 = 0$
$a_4 = S_4 - S_3 = 4 - 6 = -2$
المتتالية: $(4, 2, 0, -2, \ldots)$

ثانياً: $a_9 = S_9 - S_8$ أكمل ...
أو
$a_9 = a + 8d$ أكمل ...

ثالثاً: $S_n = n(5 - n)$
$-300 = n(5 - n)$
$n^2 - 5n - 300 = 0$
$(n - 20)(n + 15) = 0$
$n = 20$ أو $n = -15$
عدد الحدود المطلوبة يساوي 20.
أكمل بحل آخر.

٣٤

القانون: $s_n = \frac{n}{2}(49 - 3n)$

$s_1 = \frac{1}{2}(49 - 3) = 23$ وهو الحد الأول $a_1 = 23$

$s_2 = \frac{2}{2}(49 - 6) = 43$ وهذا يعني أن

$a_2 = 43 - 23 = 20$ وهذا يعني أن

$s_3 = \frac{3}{2}(49 - 9) = 60$

$a_3 = 60 - 43 = 17$ وهكذا نجد أن المتتالية كالآتي:

23, 20, 17, ... حيث نكتشف أنها حسابية فيها

$a_1 = 23$ ، $d = -3$

$\frac{n}{2}(49 - 3n) = 30$

$n = 15$

اطلب من الطلاب أن يثبتوا جبريّاً أن القانون

$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$ حيث $a_1 = 23$

$d = -3$ هو نفسه $s_n = \frac{n}{2}(49 - 3n)$

(٨) $S_n = 990$ ، $d = 3$ ، تعطي $a_1 = 21$

$n = 20$ (دقيقة)

Draft

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

كتاب الطالب من صفحة ٣٦ إلى صفحة ٤٢

١. الأهداف:

- استكشاف تناسق وتسلسل المتتاليات الهندسية
- إيجاد الحد النوني للمتتالية الهندسية (a_n)
- إيجاد الأوساط الهندسية
- إيجاد مجموع عدد من حدود متتالية هندسية

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

المتتالية الهندسية – الأوساط الهندسية.

٣. الأدوات والوسائل:

مسطرة – آلة حاسبة مبرمجة – مقصّات – ورق ملون

٤. التمهيد:

- اسأل الطلاب كل ما يعرفونه عن المتتالية الحسابية: اكتب على اللوح الأعداد:

  25، 50، 100، 200، ...

- اسألهم عن النمط. دعهم يخمنون إذا كان يوجد في هذا النمط من الأعداد عملية جمع أو ضرب.
- اطلب منهم إعطاء أمثلة عن النسبة $\left(\frac{3}{4} \ldots\right)$

٥. التدريس:

اعرض عملياً مثلثاً قائم الزاوية ومتساوي الساقين من الكرتون، واطلب إلى الطلاب أن يقوموا بالشيء نفسه على مثلث مشابه بتنصيفه بالتتابع. ناقش المتتالية الناتجة عن عدد المثلثات الناتجة من التقسيم المتتالي:

1, 2, 4, 8, 16, ...

اطلب استنتاج الحد السادس ... العاشر ... استنتاج قانون باستقراء $a_5, a_6 \ldots, a_{10}, \ldots$

$$a_n = 1 \times (2)^{n-1}$$

وبصفة عامة إذا كانت $a, b, c, d, \ldots$ متتالية هندسية فإن $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \ldots$

لاحظ أن ذلك هو مفهوم التناسب المتسلسل، أي إن النسبة بين كل حد والسابق له ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية، فإذا رمزنا إليه بالرمز r فإنه يمكن كتابة المتتالية بالصورة $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots$

الحد العام $a_n = a_1r^{n-1}$

تمارين

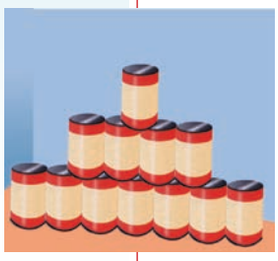
١– أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية (5, 7, 9, ...).

٢– أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية الحسابية (20, 16, 12, ...)

٣– كم حداً يلزم أخذها من المتتالية الحسابية (16, 12, 8 ...) ليكون مجموعها −20؟

٤– أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية $(\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots)$.

٥– مسرح مدرسي يحوي 15 مقعداً في الصف الأول وكان كل صف آخر يتسع لعدد من المقاعد يزيد على الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار مقعدين. كم عدد المقاعد في هذا المسرح إذا كان يتسع لـ 20 صفاً؟



٦– في محل بالسوبرماركت وضعت علب المربى كما في الشكل. في الصف الأول وضعت علبة واحدة. في الصف الثاني وضعت 4 علب. في الصف الثالث وضعت 7 علب. وسار بالنمط نفسه. احسب عدد العلب في الصف 25.

٧– إذا كان مجموع n الحدود الأولى من متتالية حسابية هو $\frac{n}{2}(49 - 3n)$ أوجد المتتالية، ثم احسب قيمة n التي تجعل هذا المجموع مساوياً 30.

٨– حنفية تصب في الدقيقة الأولى 21 لتراً، ثم يزيد ما تصبه بعد ذلك 3 لترات في الدقيقة. بعد كم دقيقة يكون مجموع ما تصبه 990 لتراً؟

٣٥

- أعطِ أمثلة وأمثلة مضادة للمتتالية الهندسية.
- دعهم يلاحظون الفرق بين المتتالية الهندسية والمتتالية الحسابية. وأن هناك متتاليات ليست هندسية وليست حسابية (كما في بعض الأنماط).
- خذ المتتاليتين:

هندسية: 2, 4, 8, 16, 32, ... حيث $a_1 = 2$ ، $r = 2$

$$a_n = n_1r^{n-1}$$

حسابية: 2, 4, 6, 8, 10, ... حيث $a_1 = 2$ ، $d = 2$

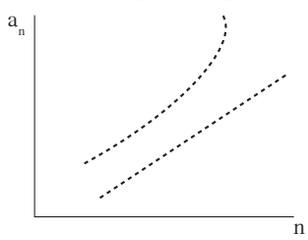
$$a_n = n_1 + (n - 1)\, d$$

مثل كلاً منهما على شكل بياني:

$y = 2^x$ (1, 2) (2, 4) (3, 8) (4, 16)

$y = 2x$ (1, 2) (2, 4) (3, 6) (4, 8)

لاحظ الفرق بين الشكلين البيانيين.



Draft

– لإيجاد وسط هندسي بين عددين، احرص على أن يكون الوسط عدداً حقيقيّاً موجباً أو سالباً وبالتالي لا بد أن يكون العددان موجبين معاً أو سالبين معاً ($ab > 0$).

– إدخال أوساط هندسية يعني إيجاد حدود ناقصة في متتالية هندسية تقع بين عددين معينين. لاحظ هنا أنه يمكن إدخال عدد زوجي من الأوساط الهندسية (الحقيقية) بين عددين مختلفي الإشارة وأنه يمكن إدخال أي عدد فردي من الأوساط الهندسية (الحقيقية) بين عددين متحدي الإشارة.

– ابدأ بأمثلة حسابية لتوضيح مجموع متتالية هندسية (محدودة).

– في مثال (٢) صفحة ٤١: وضح متتالية التوفير.

1 250, 1 500, 1 800, 2 160, ...

– اطلب البحث عن أقرب شهر يمكن فيه للعائلة أن تقوم بالرحلة بأكثر من طريقة.

– في بعض التمارين تحتاج إلى حل معادلة من الدرجة الثانية بالتحليل، وحل معادلة أسية بسيطة؛ لذا يفضل مراجعة هذه المهارات المسبقة قبل حل هذه التمارين أو التنبيه بكيفية حلها.

– المسائل المكررة والتي تحتاج إلى عمليات حسابية طويلة تترك للواجبات المنزلية، ويمكن الاكتفاء بنماذج منها.

مثال من البيئة: لنفترض أنك تريد تصغير صورة موجودة على الحاسوب طولها الحالي يساوي 10 cm. الحد الأقصى لتصغير الصورة في كل مرة هو 64%. أوجد طول الصورة بعد تصغيرها 7 مرّات.

نكتب القاعدة:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لدينا متتالية هندسية: 10, 6.4, ...

إذن: $a_1 = 10$ ، $r = 0.64$ ، $n = 7$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

فيكون $a_7 = 10 \times (0.64)^6$

$a_7 = 0.68719$ (الآلة الحاسبة)

إذن يصبح طول الصورة تقريباً 0.7 cm.

ملاحظات: ركِّز مع الطلاب على أن حدود المتتالية الهندسية موجودة على منحنى بعكس المتتالية الحسابية التي حدودها موجودة على خط مستقيم.

فنجد الحالات التالية بحسب قيمة النسبة المشتركة r.

* إذا كانت $r > 0$ ولا تساوي 1 يكون الرسم البياني للمتتالية الهندسية مُشابهاً للرسم البياني للدالة $y = 2^x$.

* إذا كانت $r = 1$ يكون الرسم البياني مستقيماً أفقيّاً على الشكل $y = k$.

* إذا كانت $r < 0$ و $a_1 > 0$ كانت النقاط الممثلة لحدود المتتالية الهندسية واقعة فوق محور السينات وتحته على الترتيب.

تواصل شفهي:

لماذا أنت بحاجة، إلى ثلاثة حدود على الأقل، من المتتالية حتى تتعرف عليها إذا كانت حسابية أو هندسية؟

٦. الربط:

اطلب من الطلاب أن يعطوا أمثلة حياتية تمثل متتاليات هندسية: (مثلاً: الكرة التي ترتد إلى ارتفاعات متناقصة بنسبة ثابتة، تزايد مرتبات موظف بنسب مئوية ثابتة ...)

٧. أخطاء واردة:

قد يجد الطلاب صعوبة في استخدام المتغيرات في مكانها المناسب ضمن القاعدة:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

لنأخذ $a_1 = 11$ ، $n = 19$ ، $n - 1 = 18$ ، $r = 3$

شجع الطلاب على وضع كل متغير في مكانه الصحيح.

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

سوف تتعلم
* المتتالية الهندسية وأساسها
* الحد النوني للمتتالية الهندسية
* الأوساط الهندسية
* مجموع (n) حدّاً من حدود المتتالية الهندسية

عمل تعاوني
ارسم مثلثاً قائم الزاوية ومتساوي الساقين.
قص المثلث إلى مثلثين قائمي الزاوية وكل منهما متساوي الساقين.
كرر الشكل نفسه كما بالشكل واحسب عدد المثلثات في كل مرة.

$a_1 =$ ■ $a_2 =$ ■ $a_3 =$ ■ $a_4 =$ ■

هل الحدود الناتجة تكون متتالية حسابية؟ وإذا كانت بالنفي، لماذا؟
ماذا تلاحظ عن العلاقة بين الحدود الناتجة؟
هل يمكنك إيجاد الحد السادس a_6؟
هل يمكنك إيجاد الحد السادس a_6 بدلالة الحد الخامس a_5؟
هل يمكنك إيجاد الحد النوني a_n بدلالة الحد a_{n-1}؟
جملة مفتوحة: من المتتالية السابقة اضرب حدود المتتالية في عدد ثابت واكتب المتتالية الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

مثال توضيحي
اعتبر المتتالية (1, 2, 4, 8, 16, ...) لاحظ النمط المتمثل في كل حد وسابقه.

المتتالية الهندسية
هي متتالية كل حد فيها يساوي ناتج ضرب الحد السابق بعدد حقيقي ثابت؛ هذا العدد يسمى أساس المتتالية الهندسية ويرمز له بالرمز r.
فمثلاً المتتالية (5, 10, 20, 40, ...) متتالية هندسية.
أمّا (5, 10, 15, 20, ...) فليست متتالية هندسية.

٣٦

Draft

٨. التقويم:

كلف الطلاب بحل التمارين رقم ٢ و٣ صفحة ٤٠ من كتاب الطالب وتحقق من أنهم يستخدمون معادلات المتتالية الهندسية بشكل صحيح. وتحقق أيضاً من استخدامهم الآلة الحاسبة بالشكل الصحيح.

٩. مسألة اليوم:

طيار هبط بطائرته اضطرارياً في الصحراء بمكان يبعد 25 km عن أقرب قرية. مشى الطيار في اليوم الأول 12 km، وتضاءلت هذه المسافة إلى النصف في اليوم الثاني بسبب الإرهاق وهكذا في اليوم الثالث ...

هل يمكن للطيار أن يصل إلى القرية؟ علل إجابتك.

الحل: (باستخدام الآلة الحاسبة)

$12 + 6 + 3 + 1.5 + ... \simeq 24$

لا يستطيع الوصول.

١٠. إجابات وحلول:

حلول التمارين والمسائل ص ٣٨، ٣٩

(١) هندسية: (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د)

الأساس:

(أ) 2؛ (ب) 0.4؛ (ج) $-\frac{1}{3}$؛ (د) -2

(٢) هندسية: (أ) ، (د) ، الأساس: (أ) 2 ، (د) -2

حسابية: (ب) ، (ج) ، الأساس: (ب) 25 (ج) 5

لا حسابية ولا هندسية: (هـ) ، (و).

(٣) (أ) $5, -15, 45, -135$

(ب) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}$

(ج) $1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.625$

(د) $100, -2\,000, 40\,000, -80\,000, 16\,000\,000$

(٤) 48

(٥) $9, 27, 81, ...$ أو $3, -9, 27, -81, ...$

(٦) $\frac{a_6}{a_2} = r^4 = 16$

$r = \pm 2$

$(-20, 10, -5, 40, ...)$ أو

$(5, 10, 20, 40, ...)$ (لاحظ المعطيات.)

(٧) $\frac{a_1 r^5}{a_1 r^3} = r^2 = 4 \Leftarrow r = \pm 2$ ، $a = \pm 7$

ولاحظ المعطيات $(7, 14, 28, 56, 112, 224, ...)$

$(-112, 56, -28, 14, -7, 224, ...)$

تعريف:

المتتالية (a_n) تسمى متتالية هندسية إذا كان $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ حيث $a_n \neq 0$ لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$، r عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio.

مثال: المتتالية (a_n) حيث $a_n = 3^n$

$(3, 9, 27, 81, 243, ..., 3^n, ...)$

هي متتالية هندسية وذلك لأن

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$

الحد النوني للمتتالية الهندسية

إذا كانت (a_n) متتالية هندسية أساسها $r \neq 0$ فإن $a_n = ar^{n-1}$

حيث a الحد الأول، a_n هو الحد النوني، r هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $a_2 = ar$

$a_3 = ar^2$

$a_4 = ar^3$

ولكن إذا كان الحد الأول هو a_k فيكون الحد النوني $a_n = a_k r^{n-k}$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية

$(a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}, ...)$

مثال (١)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول 9 وأساسها 3.

الحل

$a_1 = a = 9$

$a_2 = ar = 9 \times 3 = 27$

$a_3 = ar^2 = 9 \times 3^2 = 81$

$a_4 = ar^3 = 9 \times 3^3 = 243$

$a_5 = ar^4 = 9 \times 3^4 = 729$

المتتالية هي $(9, 27, 81, 243, 729, ...)$

مثال (٢)

متتالية هندسية حدها الأول 4 وحدها السادس 128. اكتب المتتالية.

الحل

$a_6 = 128$ ، $a = 4,$

$ar^5 = 128$

$4r^5 = 128$

$r^5 = 32$

$r = 2$

المتتالية هي $(4, 8, 16, 32, ...)$

٣٧

مثال (٣)

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني 36، وحدها الثالث يساوي 3. أوجد الحد الخامس.

الحل

$a_1 + a_2 = 36, \ a_3 = 3$

$a(1 + r) = 36 \ , \ a + ar = 36 \quad (1)$

$ar^2 = 3 \quad (2)$

بالقسمة $\frac{ar^2}{a(1+r)} = \frac{3}{36}$

$12r^2 = 1 + r$

$12r^2 - r - 1 = 0$

$(4r + 1)(3r - 1) = 0$

$r = -\frac{1}{4}$ مرفوض لأن الحدود موجبة أو $r = \frac{1}{3}$ مقبول

بالتعويض في (2) $a \times \frac{1}{9} = 3$

$a = 27$

$a_5 = ar^4$

$a_5 = 27\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3}$

تمارين

١– هل المتتاليات الآتية هندسية؟ إذا كانت كذلك فأوجد الأساس.

(أ) $(1, 2, 4, 8, ...)$ (د) $(1, -2, 4, -8, ...)$

(ب) $(10, 4, 1.6, 0.64, ...)$ (هـ) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$

(ج) $(18, -6, 2, \frac{-2}{3}, ...)$

٢– حدّد أي المتتاليات الآتية حسابية أو هندسية أو غير ذلك، ثم أوجد الحد الآتي في كل حالة.

(أ) $(45, 90, 180, 360, ...)$

(ب) $(25, 50, 75, 100, ...)$

(ج) $(30, 35, 40, 45, ...)$

(د) $(-5, 10, -20, 40, ...)$

(هـ) $(5, 6, 8, 11, 15, ...)$

(و) $(1, 4, 9, 16, ...)$

٣٨

Draft

(٨) $a_1 + a_1r^2 = 10$ ، $a_1r^4 = 81$ من (١) نجد

$$a_1(1+r^2)=10$$

$$a_1 = \frac{10}{1+r^2}$$

نعوض في (٢) $\frac{10r^4}{1+r^2} = 81$ ومنه $10r^4 - 81r^2 - 81 = 0$

وبالحل نجد $r^2 = -\frac{9}{10}$ مرفوض لأن $r^2 > 0$ او $r^2 = 9$ ومنه

$r = \pm 3$ وبالتالي $a_1 = 1$

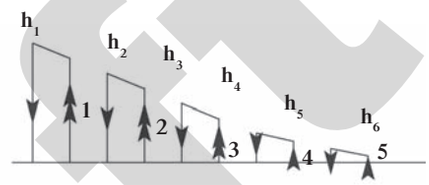
$(1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots)$

$(-243, 81, -27, 9, -3, 1, \ldots)$

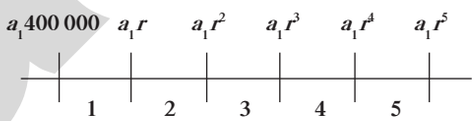
(٩) بعد الصدمة الخامسة

$$h_6 = a_1r^5 = 243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 32 \text{ cm}$$

(١٠) عدد السكان:



$a_1r^5 = 400\,000 \times (1.02)^2 = 441\,632$ (نسمة)



(١١) نلاحظ أن حدود المتتالية تكتب بالشكل $a_n = 2^{n-1}$

وأن $256 = 2^8$ ومنه $n = 9$

حلول التمارين ص ٤٠

(١) (أ) ± 10

(ب) $6, 12, 24$ أو $-6, 12, -24$

(ج) $\pm\frac{4}{15}$

(د) $7.5, 22.5, 67.5$ أو $-7.5, 22.5, -67.5$

(٢) $(2, 8, x) \Leftarrow 2x = 64 \Leftarrow 32 = x$

(٣) $4, 8, 16, 32$

(٤) $1024r^8 = 4 \Leftarrow$

$r = \pm\frac{1}{2}$ ... أكمل

حلول التمارين ص ٤٢

(١) $8\,184$ (٢) $9\,840$

(٣) $\frac{4}{3} = \frac{a_1r^2}{a_1 + a_1r} \Leftarrow$

$r = 2$ ويهمل السالب، $a_1 = 3$ ... أكمل

(٤) $\left(20, -10, 5, -\frac{5}{2}, \ldots\right)$

٣- اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية إذا علم أن:

(أ) $r = -3, a_1 = 5$

(ب) $a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{2}{3}$

(ج) $r = 0.5, a_1 = 1$

(د) $a_1 = 100, r = -20$

٤- أوجد الحد الخامس من المتتالية الهندسية $(3, 6, 12, \ldots)$.

٥- أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الأول 81 وحدها الخامس 1.

٦- أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثاني 10 وحدها السادس 160.

٧- أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الرابع 56 وحدها السادس 224.

٨- مجموع الحدين الأول والثالث من متتالية هندسية 10 وحدها الخامس 81، أوجد المتتالية.

٩- سقطت كرة من ارتفاع 243 m فوق سطح الأرض، فإذا علم أن الكرة ترتد إلى أعلى بعد كل اصطدام وتصل إلى ارتفاع قدره $\frac{2}{3}$ من ارتفاعها السابق، إلى أي ارتفاع تصل بعد الصدمة الخامسة؟

١٠- يزداد عدد سكان المدينة بمعدل ثابت 2% كل سنة، فكم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد 5 سنوات إذا كان عددهم الحالي 400 000 نسمة.

١١- أوجد عدد حدود المتتالية $(1, 2, 4, \ldots, 256)$.

الأوساط الهندسية بين عددين

Geometric Means Between Two Numbers

إذا كان a و b عددين حقيقيين حيث $ab > 0$

فإن $\sqrt{ab}$ أو $-\sqrt{ab}$ يكون وسطاً هندسياً بين العددين a و b.

مثال (١)

أوجد وسطاً هندسياً بين العددين $\frac{3}{9}$ و 27.

الحل

الوسط الهندسي : $+\sqrt{27 \times \frac{3}{9}} = +\sqrt{9} = 3$

أو الوسط الهندسي : $-\sqrt{27 \times \frac{3}{9}} = -\sqrt{9} = -3$

تدريب

أوجد الوسط الهندسي بين العددين -3 ، -27

وبصورة عامة: في المتتالية الهندسية $(a, b, c, d, \ldots, k, l)$

تسمى $b, c, d, \ldots, k$ أوساطاً هندسية للعددين الحقيقيين a, l وتسمى عملية إيجاد $b, c, d, \ldots, k$ بعملية إدخال أوساط هندسية بين العددين a, l.

مثال (٢)

أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين 8 و512.

الحل

$a = 8, l = 512, n = 5 + 2 = 7$

$l = ar^{n-1}$

$512 = 8\, r^{7-1}$

$r^6 = 64$

يعطي $r^6 = 2^6$ أو $r^6 = (-2)^6$

$r = 2$ أو $r = -2$ مرفوض

الأوساط هي 16، 32، 64، 128، 256

تمارين

١- أوجد الحدود الناقصة في المتتاليات الهندسية الآتية:

(أ) $(5, \blacksquare, 20, \ldots)$ (ب) $(3, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 48, \ldots)$

(ج) $\left(\frac{2}{5}, \blacksquare, \frac{8}{45}, \ldots\right)$ (د) $(2.5, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 202.5, \ldots)$

٢- إذا كان الوسط الهندسي للعددين 2، x هو 8 فما قيمة x؟

٣- أدخل أربعة أوساط هندسية بين 2 و64.

٤- أدخل سبعة أوساط هندسية بين 1024 و4.

مجموع n حداً الأولى من متتالية هندسية — Sum of n Terms of a Geometric Sequence

إذا كان (a_n) متتالية هندسية

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

هو مجموع n حداً الأولى

فإن $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ (1)

وإذا كان $r \neq 0$ بضرب طرفي (1) في r

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ (2)

بطرح (1) من (2):

$(r-1)S_n = ar^n - a$ على شرط أن $r \neq 1$

$= a(r^n - 1)$

لاحظ أنه من (1) إذا كانت $r = 1$ فإن $S_n = na$

وإذا كانت $r \neq 1$ فإن $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Draft

(٥) $n = 8$ ، ... أكمل

(٦) $n = 4$

(٧) $(-20\ ,-10\ ,-5, \ldots)$

(٨) $a_n = \dfrac{a^{n-1}}{2}$ ، $a_{n+1} = \dfrac{a^n}{2}$

إذن $a_{n+1} = a\,.\,\dfrac{a^{n-1}}{2} = a\,.\,a_n$

فالمتتالية هندسية أساسها a.

حل آخر:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a^{n-1}}{2} \div \frac{a^{n-2}}{2} = a$$

= ثابت

حل آخر:

$a_n = \dfrac{1}{2}\,a^{n-1}$ وهذا على صورة

$a_n = ar^{n-1}$ الهندسية

(٩) $\dfrac{ar^6}{ar^3} = 8 \Leftarrow r^3 = 8$ ... أكمل

(١٠) 6، 6558

(١١) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{c^2} \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$

تعطي المطلوب (من خواص التناسب)

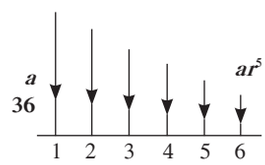
حل آخر:

$b = ar$، $c = ar^2$، الطرف الأيسر يساوي:

$$\frac{a^2 + a^2r^2}{a^2r^2 + a^2r^4} = \frac{a^2(1+r^2)}{a^2r^2(1+r^2)} = \frac{1}{r^2}$$

الطرف الأيمن يساوي: $\dfrac{a^2}{a^2r^2} = \dfrac{1}{r^2}$

(١٢) أولاً: $h = 36\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 \approx 8.5$



ثانياً: مجموع المسافات

$$36 + 2 \times \frac{27\left[\left(\frac{3}{4}\right)^5 - 1\right]}{\frac{3}{4} - 1} \approx 200.7\ \text{m}$$

مثال (١)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (2, 4, 8, ...).

الحل

$$a = 2,\ r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2,\ n = 10$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = 2\,\frac{(1-1024)}{1-2}$$

$$S_n = 2 \times 1023 = 2046$$

مثال (٢)

فكرت عائلة "محمد" بأن تقوم برحلة في أول شهر أيلول لمدة أسبوع وكانت تكاليف الرحلة 13750 ليرة سورية. ولكي تتوفر لدى "محمد" هذه التكلفة بدأ يوفر من مصاريفه 1250 ليرة سورية كل شهر ابتداءً من شهر آذار على أن يزيد ما يوفره بمقدار 20% كل شهر عن الشهر السابق له. هل يمكن أن يوفر "محمد" كل تكلفة الرحلة حتى يقوم بها في أول أيلول؟

الحل

S_n يمثل ما توفره العائلة حتى شهر n.

$a = 1250$

$r = 1.2$

عدد الأشهر = 6 (آذار إلى أيلول)

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{1250(1-1.2^6)}{1-1.2}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

يكون: $S_n = 12412.4$

لا تستطيع العائلة القيام بالرحلة في أول أيلول. فكر مع العائلة في أن تجعل التوفير 25% زيادة عن كل شهر سابق حتى يتحقق الأمل في القيام بالرحلة.

٤١

Draft

حلول تمارين (مجموعة أولى) ص ٤٣ – ٤٦

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (ب)

(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (ج)

(٩) (أ) (١٠) (أ) (١١) (د) (١٢) (أ) (١٣) (د)

(١٤) (أ) (١٥) (ج) (١٦) (ب) (١٧) (د) (١٨) (أ)

(١٩) (ب) (٢٠) (أ) (٢١) (أ) (٢٢) (أ) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب)

(٢٥) (أ) (٢٦) (ب) (٢٧) (ج) (٢٨) (ب) (٢٩) (د)

(٣٠) (أ)

تمارين

١– أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول 8 وأساسها 2.

٢– أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية $(3, 9, 27, ...)$.

٣– مجموع الحدين الأول والثاني في متتالية هندسية حدودها موجبة 9 وحدها الثالث 12، فما مجموع الحدود الستة الأولى؟

٤– متتالية هندسية مجموع الحدين الثاني والثالث فيها $a_2 + a_3 = -5$ وحدها الأول 20 فما المتتالية؟

٥– أوجد عدد الحدود من الحد ذو القيمة $\frac{1}{9}$ وحتى الحد ذو القيمة 243 $\left(\frac{1}{9}, ..., 27, 81, 243\right)$ ثم أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

٦– كم حداً يلزم أخذه من المتتالية الهندسية $(3, 9, 27, ...)$ ليكون المجموع 120.

٧– متتالية هندسية أساسها 2 ومجموع حدودها الثلاثة الأولى 35– أوجد المتتالية.

٨– أثبت أن المتتالية $\left(\frac{a^{n-1}}{2}\right)$ هندسية ثم أوجد حدها السادس.

٩– إذا كان الحد الرابع في متتالية هندسية 8 وحدها السابع 64 أوجد المتتالية ومجموع الحدود الثمانية الأولى.

١٠– متتالية هندسية فيها $r = 3$، $a_5 = 486$ أوجد حدها الأول ثم أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى منها.

١١– إذا كانت a، b، c متتالية هندسية فأثبت أن $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2}{b^2}$.

١٢– سقطت كرة من ارتفاع 36 m، وفي كل مرة تصطدم بالأرض ترتفع إلى ثلاثة أرباع المسافة التي سقطت منها. أوجد:

أولاً: المسافة التي سقطت منها الكرة عندما اصطدمت بالأرض للمرة السادسة.

ثانياً: مجموع المسافات التي تكون الكرة قد قطعتها منذ لحظة سقوطها حتى اللحظة التي اصطدمت فيها بالأرض للمرة السادسة.

تمارين (مجموعة أولى)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١– إذا كان $5x = 7y$ فإن $\frac{y}{x}$ تساوي:

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{7}{5}$ (ج) $\frac{1}{35}$ (د) $\frac{35}{1}$

٢– إذا كان $\frac{y}{x} = 3$ فإن $x + 3y$ تساوي:

(أ) $3x$ (ب) $10x$ (ج) $5x$ (د) $4x$

٣– إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{6}{9}$ فإن:

(أ) $x = 6$، $y = 9$ (ب) $x = 2$، $y = 3$

(ج) $x = 9$، $y = 6$ (د) الإجابات السابقة خاطئة

٤– إذا كان $\frac{a}{6} = \frac{1}{b}$ فإن إحدى الإجابات الصحيحة هي:

(أ) $a = -1$، $b = 6$ (ب) $a = 2$، $b = 3$

(ج) a، $b = -3$ (د) $a = \frac{1}{3}$، $b = \frac{1}{2}$

٥– العدد الذي أضيف إلى كل من حدي النسبة $\frac{5}{9}$ حتى أصبحت $\frac{3}{5}$ هو:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 4 (د) 5

٦– ما العدد الواجب طرحه من الأعداد 12، 7، 10، 6 لتصبح أعداداً متناسبة؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

٧– إذا كانت 5، 7، x، 14 أربع كميات متناسبة فإن x تساوي:

(أ) 10 (ب) $\frac{5}{7}$ (ج) 9 (د) 14

٨– إذا كانت 1، x، 81 في تناسب متسلسل فإن x تساوي:

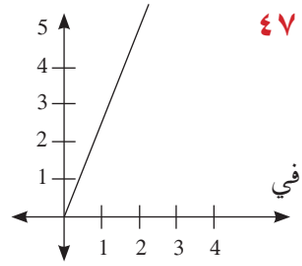
(أ) ± 81 (ب) $\pm\frac{1}{81}$ (ج) ± 9 (د) ± 18

٩– إذا كانت 5، 1، b، a أربع كميات متناسبة فإن $\frac{a}{b}$ تساوي:

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{5}{1}$ (ج) 10 (د) 5

Draft

حلول تمارين (مجموعة ثانية) ص ٤٧



السؤال الأول:

(أ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$c = dk$ ، $a = bk$ ثم عوض في

كل من الطرفين ... = k^2

وتوجد حلول أخرى

(ب) $y = ax$ تعطي $a = 4$ إذن $y = 4x$

عندما $x = 27$ نجد $y = 108$

السؤال الثاني:

(أ) $b = \frac{5}{3}a$ ، $c = \frac{13}{9}a$

$$a\left(1 + \frac{5}{3} + \frac{13}{9}\right) = 74$$

$$a = 18$$

$$b = \frac{5}{3}a = \frac{5}{3} \times 18 = 30 \text{ ، } c = 26$$

حل آخر:

a	:	b	:	c
		5		3
13				9
13		15		9

إذن: $a:b:c = 9:15:13$

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{15} = \frac{c}{13} \Rightarrow \frac{a+b+c}{9+15+13} = \frac{a}{9}$$

$$\frac{a}{9} = \frac{74}{37} \Rightarrow a = 18, b = 30, c = 26$$

حلول أخرى ...

(ب) $w = \frac{k}{h^2} \Rightarrow k = w \times h^2$

$k = 500 \times (6\,400)^2$

$wh^2 = 500 \times (6\,400)^2$

$w \times (6\,450)^2 = 500 \times (6\,400)^2$

$w = 492$ kg

السؤال الثالث:

(أ) من خواص التناسب

إحدى النسب = $\frac{(a+b)-(b+c)}{5-3}$

$\frac{a-c}{2} = m$ (1)

إحدى النسب = $\frac{2a+2b+2c}{5+3+6}$

$\frac{2(a+b+c)}{14} = m$ (2)

من (1) و (2) ينتج أن $\frac{a+b+c}{7} = \frac{a-c}{2}$

(ب) ثابت $\frac{V \times P}{\text{ثابت}}$ = تعطي ثابت = $V \times P$

تغير عكسي

$\frac{\text{ثابت} \times V}{T}$ = ثابت ⇐ $\frac{V}{T}$ = ثابت ⇐

تغير طردي

١٠– إذا كان $25a^2 - 16b^2 = 0$

حيث b, a عناصر من IR^+ فإن $\frac{a}{b}$ تساوي:

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{16}{25}$ (ج) $\frac{5}{4}$ (د) $\frac{-5}{4}$

١١– إذا كان (a) وسطاً متناسباً بين b و c فإن:

(أ) $a = bc$ (ب) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (ج) $\frac{b}{a} = \frac{b}{c}$ (د) $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$

١٢– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $\frac{a-b}{b}$ تساوي:

(أ) $\frac{c-d}{d}$ (ب) $\frac{a-c}{b}$ (ج) $\frac{c-d}{b}$ (د) $\frac{a-c}{b+d}$

١٣– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ فإن $\frac{e^2}{f^2}$ تساوي:

(أ) $\frac{2a}{2b}$ (ب) $\frac{ac}{bd}$ (ج) $\frac{ad}{bc}$ (د) $\frac{ce}{df}$

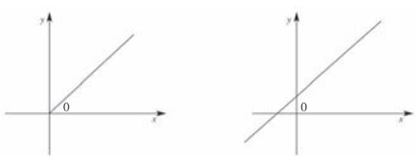
١٤– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$ فإن $\frac{a+b}{b}$ تساوي:

(أ) $\frac{9}{4}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{9}$

١٥– إذا كانت الأعداد 2، 8، x، 12 متناسبة فإن x تساوي:

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 3 (د) 5

١٦– أي من الأشكال الآتية تمثّل $y = kx$؟ اختر الإجابة الصحيحة.



شكل (1) شكل (2)

٤٤

Draft

السؤال الرابع:

(أ) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}, \frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=m^2$

حيث m ثابت

يعطي $m^2=\frac{a^2+b^2+a}{b^2+c^2+bc}$ من خواص التناسب (1)،

$m^2=\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}$ من خواص التناسب (2)

الطرفان متساويان

حل آخر: $a=m^2c$، $b=mc$

ثم عوض في الطرفين $m=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

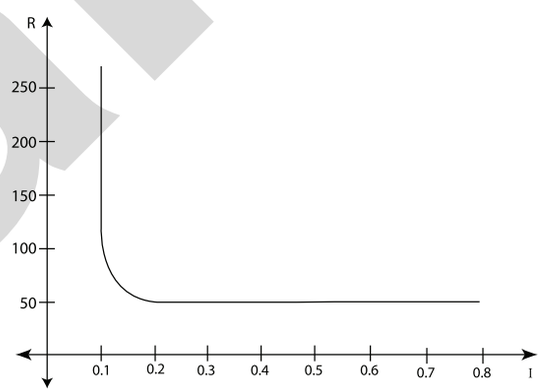
(ب) $m=75$، $m\times 4=300$، $y=mn$

حيث m ثابت

(ساعات) $n=10$، $750=75n$، $y=75n$

السؤال الخامس:

واضح أن العلاقة عكسية لأن ثابت $=I\times R$



$K=0.1\times 250=25$

$20R=25\Rightarrow R=\frac{5}{4}$

$I\times 0.75=25$

$I=\frac{100\times 25}{75}=\frac{100}{3}$

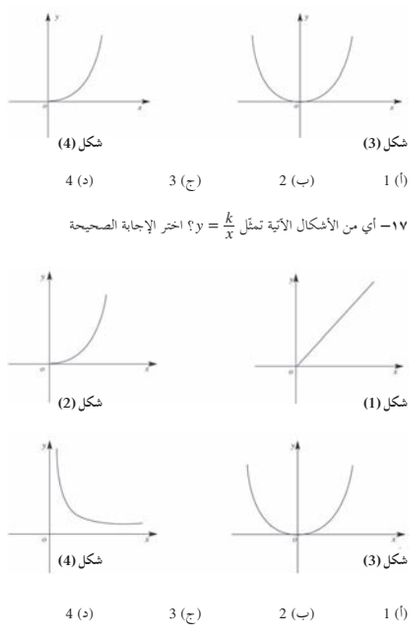
السؤال السادس:

التسرب يكون متتالية هندسية: $(8, 16, 32 \ldots)$

حيث $a_1=8$، $r=2$

$\frac{8(1-2^n)}{1-2}=8184$

(أيام) $n=10$



شكل (3) شكل (4)

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

١٧– أي من الأشكال الآتية تمثّل $y=\frac{k}{x}$؟ اختر الإجابة الصحيحة

شكل (1) شكل (2)

شكل (3) شكل (4)

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

٤٥

السؤال السابع:

جملة الأقساط $64\,200-20\,000=44\,200$

$a_1=50+80=130$، $a_n=50n+80$

في المتتابعة الحسابية، $d=50$، $a_2=100+80=180$

$\frac{n}{2}[260+(n-1)\times 50]=44\,200$

$n(26+5n-5)=8\,840$

$5n^2+21n-8\,840=0$

$n(5n+21)=8\,840$

$(5n+221)(n-40)=0$

$=40$ (قسطاً)

– اطلب إلى الطلاب تحقيق صحة الناتج

$130+180+230+\ldots$ (إلى 40 حدّاً)

$S_{40}=20[260+39\times 50]=44\,200$

وأضف الدفع الفوري ⇐ ثمن الشراء

Draft

حلول نموذج أسئلة

السؤال الأول

(أ) إذا كان $\frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{8}$

أوجد $a : b : c$

(ب) إذا كان عدد الأعمدة التي يتم تركيبها في أحد الطرق السريعة يتناسب عكسيّاً مع مربع المسافة بين كل عمودين، وكان عدد الأعمدة 15 عندما تكون المسافة بين كل عمودين 7 أمتار، احسب المسافة بين كل عمودين عندما يكون عدد الأعمدة 135.

السؤال الثاني

(أ) إذا كان عدد السكان في مدينة ما هو 80 000 نسمة، وعلم أن معدل تزايد سكان هذه المدينة في كل عام هو 3% عن العام السابق له مباشرة، أوجد عدد سكان هذه المدينة بعد 20 عاماً.

(ب) متتالية حسابية حدها السادس 17 ومجموع حديها الثاني والرابع 16، أوجد هذه المتتالية.

السؤال الثالث

(أ) أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين 6 و384.

(ب) $\sum_{n=1}^{5}(n+5)$

(ج) إذا كان مجموع الحدود العشرة الأولى من متتالية حسابية 140 ومجموع حديها الثاني والثالث 16 أوجد المتتالية.

السؤال الرابع

(أ) إذا كانت B و A نقطتين على منحنى حيث $A(6, 4)$، $B(12, y)$ أوجد y:

أولاً – إذا كان المنحنى يمثل تغيراً طرديّاً.

ثانياً – إذا كان المنحنى يمثل تغيراً عكسيّاً.

(ب) إذا كان y و x متغيرين حقيقيين وكان $\frac{3}{4} = \frac{5x-y}{4x+7y}$

أثبت أن y تتناسب طرديّاً مع x وأوجد ثابت التناسب.

١٨– واحدة من سلاسل الأعداد الآتية لا تكون تناسباً:
(أ) 3، 4، 5، 6 (ب) 3، 4، 6، 8 (ج) 3–، 4–، 6، 8– (د) 3، 4، 6–، 8–

١٩– إذا كانت $y = \frac{k}{x}$ حيث (k) ثابت فإن:
(أ) $y = kx$ (ب) $xy = k$ (ج) $y = kx^2$ (د) $y = \frac{k}{x^2}$

٢٠– إذا كانت y تتغير طرديّاً بتغير x وكانت $y = 9$ عندما $x = 3$ فإنه عندما $y = 27$، فإن x تساوي:
(أ) 9 (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) 3

٢١– إذا كانت $y = \frac{k}{x}$ وكانت $x = 8$ عندما $y = 5$ فإنه عندما $y = 4$ فإن x تساوي:
(أ) 10 (ب) 5 (ج) 4 (د) 20

٢٢– إذا كانت $y = \ell + 5$ وكانت $\ell = kx$ وكانت $y = 9$ عندما $x = 4$ فإنه عندما $x = 2$ فإن y تساوي:
(أ) 7 (ب) 10 (ج) 4 (د) صفر

٢٣– إذا كانت مساحة الدائرة $A = \pi r^2$ فإن المساحة تتناسب طرديّاً مع:
(أ) π (ب) r^2 (ج) πr^2 (د) r

٢٤– مستطيل بعداه x و y ومساحته $36\ cm^2$ فإن:
(أ) $y = 36x$ (ب) $y = \frac{36}{x}$ (ج) $y + x = 13$ (د) $y - x = 5$

٢٥– إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{1}{5}$ فإن $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ تساوي:
(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{1\times 3}{5}$ (ج) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ (د) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$

٢٦– إذا كانت $(5, x, ..., 5 + 3x, 96)$ متتالية حسابية فإن x تساوي:
(أ) 21 (ب) 24 (ج) 48 (د) 21–

٢٧– مجموع الحدود العشرين من المتتالية الحسابية التي فيها $d = 2$ و $a = 10$:
(أ) 840 (ب) 3800 (ج) 580 (د) 8400

٢٨– الحد الناقص في المتتالية الحسابية 95 , 75, □ هو:
(أ) 80 (ب) 85 (ج) 90 (د) 85.5

٢٩– عدد حدود المتتالية الهندسية $(1, 2, 4, ..., 1024)$ هو:
(أ) 9 (ب) 8 (ج) 12 (د) 11

٣٠– مجموع عشرة الحدود الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول 5 وأساسها 2 يساوي:
(أ) 5115 (ب) 10 230 (ج) 5120 (د) 5015

٤٦

تمارين (مجموعة ثانية)

السؤال الأول:

(أ) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فأثبت أن: $\frac{ac}{bd} = \frac{(a-c)^2}{(b-d)^2}$

(ب) إذا كان $y = kx$ وكان $y = 36$ عندما $x = 9$ أوجد y عندما $x = 27$ ثم ارسم العلاقة بين y، x.

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$، $\frac{a}{c} = \frac{9}{13}$ وكان $a + b + c = 74$، أوجد القيمة العددية لكل من a، b، c.

(ب) يتغير وزن جسم ما عكسيّاً مع مربع بعده عن مركز الأرض. فإذا أطلق صاروخ يزن 500 kg، فكم يكون وزن الصاروخ عندما يكون على ارتفاع 50 km عن سطح الأرض مقرّباً الجواب لأقرب ثقل kg؟
(اعتبر طول نصف قطر الكرة الأرضية 6400 km)

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان $\frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{3} = \frac{c+a}{6}$ أثبت أن:

$$\frac{a-c}{2} = \frac{a+b+c}{7}$$

(ب) إذا كانت العلاقة بين حجم الغاز (v) وضغطه (ρ) ودرجة حرارته (T) هي: مقدار ثابت $\frac{\rho v}{T} = k$ فأوجد نوع العلاقة في الحالات الآتية:
١ – بين v، ρ إذا كانت درجة الحرارة ثابتة.
٢ – بين v، T إذا كان الضغط ثابتاً.

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان a، b، c ثلاث كميات في تناسب متسلسل أثبت أنَّ:

$$\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2} = \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}$$

(ب) إذا كانت كمية العنب (y) التي يجنيها أحد العمال متناسبة مع الزمن الذي يستغرقه هذا العامل في عملية الجني، وإذا قطف العامل 300 kg من العنب في 4 ساعات فأوجد الزمن الذي يستغرقه هذا العامل بالجهد نفسه في قطف 750 kg.

السؤال الخامس:

قام "سمير" بإجراء تجربة عملية لتعرف العلاقة بين شدة التيار (I) ومقاومة السلك (R) عند ثبات فرق الجهد، وحصل على النتائج الآتية:

٤٧

Draft

R	0.1	0.2	0.4	0.8	1
I	250	125	62.5	31.25	25

مثل العلاقة بين R و I واستنتج نوع هذه العلاقة.
وأوجد (R) عندما $I = 20$ و (I) عندما $R = 0.75$

السؤال السادس:
خزان فيه 8184 لتراً من الماء، يتسرب منه في اليوم الأوّل 8 لترات وفي اليوم الثاني 16 لتراً وفي اليوم الثالث 32 لتراً وهكذا. بعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً؟

السؤال السابع:
اشترى رجل دراجة بمبلغ 64 200 ليرة سورية، ودفع من ثمنها فوراً مبلغ 20 000 ليرة سورية، واتفق مع البائع على أن يدفع له باقي الثمن على أقساط شهرية تكون متتالية حسابية حدها النوني يساوي $50n + 80$. أوجد عدد الأقساط.

٤٨

حلول نموذج أسئلة

السؤال الأول

(أ) $a : b : c = 3 : 2 : 5$

(ب) $F = \frac{7}{3}$

السؤال الثاني

(أ) عدد السكان بعد عام واحد: $1.03 \times 80\ 000$

عدد السكان بعد 20 عاماً: $(1.03)^{20} \times 80\ 000$

$\overrightarrow{1.03}$ shift x^y 20 = 1.806111235

عدد السكان المطلوب: 444 881 نسمة

(ب) $a_1 = 2$، $d = 3$

المتتالية: $(2, 5, 8, ...)$

السؤال الثالث:

(أ) الأوساط: 12, 24, 48, 96, 192

(ب) $\sum_{1}^{5}(n + 5) = + 9 + 8 + 7 + 6\ 10 = 40$

(ج) $a_1 = 5$ ، $d = 2$، أكمل

السؤال الرابع

(أ) أولاً: $y = 8$

ثانياً: $y = 2$

(ب) $y = \frac{8}{25}x$، ثابت التناسب يساوي $\frac{8}{25}$.

Draft

الوحدة ٢

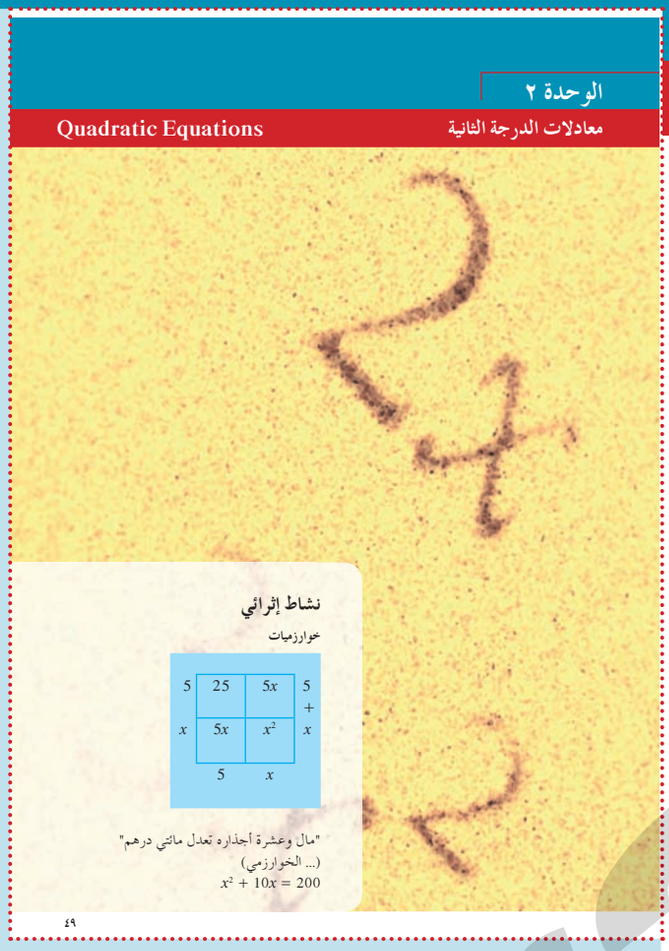
معادلات الدرجة الثانية

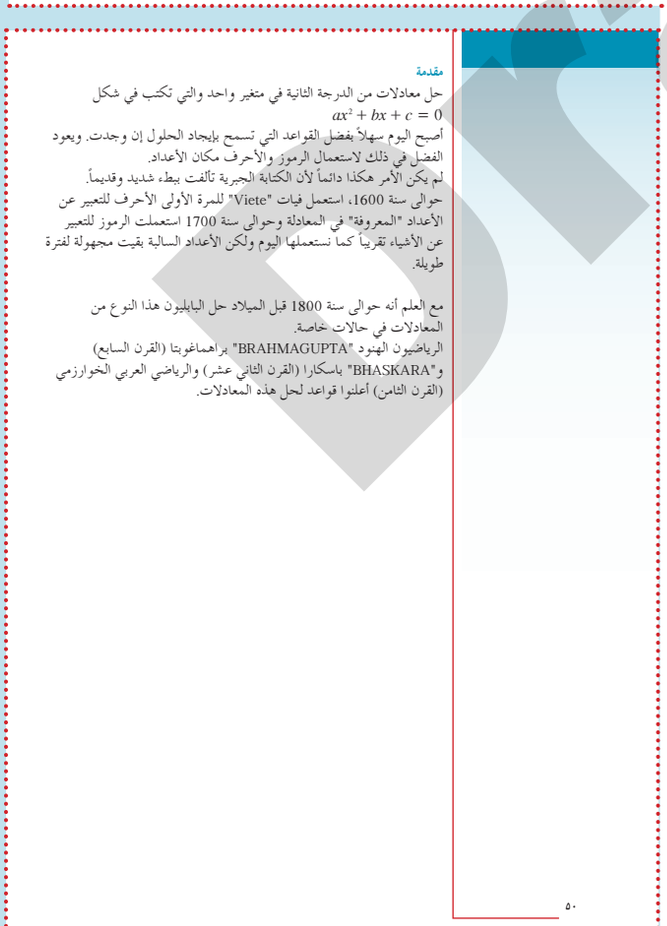
الأهداف

- التعرف إلى كتابة المعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد
- حل معادلات من الدرجة الثانية بطريقة التحليل إلى عوامل
- حل معادلات من الدرجة الثانية باستخدام المميز Δ
- كتابة معادلة من الدرجة الثانية إذا عرف جذراها
- التعرف إلى كثيرة الحدود من الدرجة الثانية
- حل معادلات تتحول إلى الدرجة الثانية
- الربط بين معادلة من الدرجة الثانية والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية

المحتويات

١. معادلات من الدرجة الثانية
٢. القانون العام لحل المعادلة من الدرجة الثانية
٣. كثيرة الحدود من الدرجة الثانية في متغير واحد
٤. معادلات تتحول الى الدرجة الثانية





Draft

المكونات الفرعية	المفاهيم	المهارات
القانون العام المميز جذرا المعادلة تكوين المعادلة كثيرة الحدود	المعادلة من الدرجة الثانية المميز الموجب المميز السالب المميز الصفري كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة	استخدام القانون لحل معادلات من الدرجة الثانية معرفة إشارة المميز وجذري المعادلة من خلال الرسم البياني لمعادلة القطع المكافئ إيجاد المعادلة إذا علم جذراها إيجاد الارتفاع الأقصى لجسم قذف إلى الأعلى

Draft

حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد Solving Quadratic Equations in One Variable

كتاب الطالب من صفحة ٥١ إلى صفحة ٧٢

١. الأهداف:

- حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون
- استخدام المميز Δ
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية
- الربط بين المعادلة من الدرجة الثانية والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

معادلة – مميز Δ

٣. الأدوات والوسائل:

ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة

٤. التمهيد:

- اسأل الطلاب عن مفكوك أو نواتج التعابير الجبرية التالية:

(أ) $(x + y)^2 =$

(ب) $(y - x)^2 =$

(ج) $(x - y)(x + y) =$

- اسأل الطلاب إذا كان الحل ممكناً أم لا لكل من المعادلات التالية:

(أ) $x^2 + 2x = 0$

(ب) $x^2 - 4 = 0$

(ج) $x^2 + 9 = 0$

وناقش مع الطلاب السبب في كل حالة.

٥. التدريس:

- يمكن عرض المسألة التالية على الطلاب والتفكير في كيفية حلها بمفاهيم ومصطلحات الخوارزمي، وبلغة الرموز:

ورد في كتاب «الجبر والمقابلة» الذي وضعه محمد بن موسى الخوارزمي (في القرن التاسع ميلادي) مسائل كلامية تتطلب حل معادلة من الدرجة الثانية، من أمثلة ذلك:

مالان وعشرة أجذار تعدل ثمانية وأربعين درهماً، وجاء الحل كالآتي:

ينبغي أن ترد «المالين» إلى مال واحد، وقد علمت أن مالاً من مالين نصفها، فأردد كل شيء في المسألة، فكأنه قال: مال وخمسة أجذار يعدل 24 درهماً؛ ومعناه: أي مال

حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

سوف تتعلم

* قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
* استخدام المميز
* مقارنة بين المعادلة والرسم البياني للدالة من الدرجة الثانية باستعمال المميز
* مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
* إيجاد المعادلة إذا علم جذراها

تعريف

تسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد كل معادلة تكتب بالشكل الآتي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث a، b، c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

أمثلة: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$3x^2 + 4x = 0$

$5x^2 + 3 = 0$

ملاحظة: إذا كان b أو c يساوي كلٌّ واحد منهما صفراً، منفصلين أو مجتمعين، نحصل على معادلة ناقصة من الدرجة الثانية في متغير واحد وطريقة الحل نحصل عليها بواسطة التحليل إلى عوامل.

إذا كان $b = 0$ تكتب المعادلة: $ax^2 + c = 0$

إذا كان $c = 0$ تكتب المعادلة: $ax^2 + bx = 0$

إذا كان $b = c = 0$ تكتب المعادلة: $ax^2 = 0$

مثال (١)

حل المعادلة: $2x^2 + 4x = 0$

الحل

$x(2x + 4) = 0$

إمكانية أن يساوي كل عامل صفراً: $2x + 4 = 0$ أو $x = 0$

ويكون الحل:

$x = 0$ أو $x = -2$

ويكون للمعادلة جذران حقيقيان.

مثال (٢)

حل المعادلة: $3x^2 - 5 = 0$

الحل

$3x^2 - 5 = 0$

تحليل إلى عوامل $(\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5}) = 0$

إمكانية أن يساوي كل عامل صفراً:

$\sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$ أو $\sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$

ويكون الحل أيضاً:

$x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ أو $x = +\sqrt{\frac{5}{3}}$

٥١

Draft

إذا زدت عليه خمسة أجذار، بلغ أربعة وعشرين، تنصف الأجذار فتكون اثنين ونصفاً، فاضربهما في مثلهما فتكون ستة وربعاً، فزدها على الأربعة والعشرين فيكون المجموع ثلاثين درهماً وربع درهم، فخذ جذرها، وهو خمسة ونصف، وانقص منها نصف الأجذار، وهو اثنان ونصف، يبقى ثلاثة، وهو جذر المال، والمال تسعة ...

المال هو الكلمة التي نعني بها الآن x^2، جذر المال هو (x)؛ أي أن مسألة الخوارزمي هي بالرموز:

$2x^2 + 10x = 48$ وحل الخوارزمي بلغة الرموز المعاصرة كالآتي:

$x^2 + 5x = 24$

لإكمال المربع: $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + 24 = \frac{121}{4}$

$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$

جذر المال: $x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$

المال: $x^2 = 9$

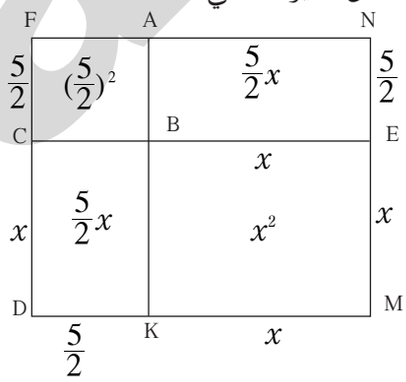
■ لاحظ أن الأعداد السالبة لم تكن معروفة في ذلك الحين، وأيضاً المسائل التي تعطي مسائل عملية وليست مجردة.

استخدم الخوارزمي (وبعده كثيرون) حلولاً هندسية لمعادلات الدرجة الثانية.

الحل الهندسي للمثال السابق يسير كالآتي:

(المعادلة في أبسط أشكالها)

$x^2 + 5x = 24$



أنشئ مربعاً طول ضلعه مجهول x (جذر المال)، وليكن المربع $BKME$.

مد ME إلى N بحيث: $EN = \frac{1}{2}$ معامل x

أي أن $EN = \frac{5}{2}$

ومد MK إلى D بحيث: $KD = \frac{5}{2}$

أكمل الشكل كما هو مبين:

مساحة الشكل $ABCDMN = x^2 + 5x$

ولكن $x^2 + 5x = 24$

إذن مساحة المربع $FDMN$ تساوي:

مساحة المربع $FCBA + 24$

$= 24 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \frac{25}{4}$

$= \frac{121}{4}$

ويكون الحل أيضاً بكتابة المعادلة كما يلي:

$3x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{3}$

$x = +\sqrt{\frac{5}{3}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

ويكون للمعادلة جذران حقيقيان.

مثال (٣)

حل المعادلة: $4x^2 = 0$

الحل

$4x^2 = 0$

تحليل إلى عوامل: $4x \times x = 0$

إمكانية أن يساوي كل عامل صفراً. $x = 0$ أو $4x = 0$

يكون الحل: $x = 0$ حل وحيد

ويكون للمعادلة جذر حقيقي واحد.

تمارين

حل المعادلات:

١- $5x^2 + 10x = 0$

٢- $3x^2 - 5x = 0$

٣- $7x^2 - 24 = 0$

٤- $4x^2 + 6 = 0$

٥- $23x^2 = 0$

٦- $-3x^2 = 0$

دعنا نفكر ونتناقش

سبق أن قمت بحل بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل كما في المثال الآتي:

حل المعادلة:

$x^2 - 7x + 10 = 0$

الحل

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

$x - 5 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$x = 5$ أو $x = 2$

٥٢

إذن للمعادلة جذران هما $x = 2$ أو $x = 5$

طريقة أخرى للحل:

بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بالإتمام إلى مربع كامل، كما في المثال الآتي:

حل المعادلة:

$x^2 + 2x - 5 = 0$

$x^2 + 2x = 5$

$x^2 + 2x + 1 = 5 + 1$ بإكمال المقدار $x^2 + 2x$ إلى مربع كامل

$(x + 1)^2 = 6$

الحل

$x + 1 = \pm\sqrt{6}$

$x = -1 + \sqrt{6}$ أو $x = -1 - \sqrt{6}$

إن طريقة الإتمام إلى مربع كامل تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

مثال (١)

حل المعادلة: $x^2 + 10x = -16$

الحل

نكمل $x^2 + 10x$ لتصبح مربعاً كاملاً

وذلك بإضافة 25 ليصبح المربع الكامل $(x + 5)^2$

بإضافة 25 لطرفي المعادلة نجد أن:

$(x + 5)^2 = 25 - 16$

$(x + 5)^2 = 9$

$x + 5 = +3$ أو $x + 5 = -3$

$x = -2$ أو $x = -8$

عمل تعاوني

استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية

Solving quadratic equations by using the quadratic formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$

وذلك بأخذ مثال عددي:

٥٣

Draft

إذن طول ضلع المربع $FDMN$ يساوي $\frac{11}{2}$.

أي أن $x + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

ومنه: $x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$ (جذر المال)

وواضح أن $x^2 = 3 \times 3 = 9$ (المال)

في استنتاج القانون، لا داعي لأن تعطي الطالب البرهان، ووضح أن القانون يعطي إجابتين (جذرين للمعادلة التربيعية)، وأنه عند استخدام القانون يبدأ الطالب في وضع المعادلة المعطاة على الصورة العامة:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

هناك معالجات أخرى لاستنتاج القانون، مثلاً:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

بضرب الطرفين في $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

بإكمال المربع $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ اطلب إلى المتفوقين كواجب منزلي أن يحاولوا إيجاد طرق أخرى.

٦. الربط:

أعطِ الطلاب تمارين إضافية (كواجب) يكون فيها إطلاق صاروخ (أو كرة) من ارتفاع معين عن سطح الأرض حتى يعوض عن (h) ويمكنك إعطاء قانون الارتفاع ص ٥٥ للمقذوفات كالآتي:

(١) إذا كان إطلاق المقذوفة من سطح الأرض يكون القانون:

$$h = -16t^2 + zt$$

حيث (z) سرعة إطلاق المقذوفة و (t) الزمن.

(٢) $h = -16t^2 + zt + h_o$

حيث (h_o) الارتفاع الذي أطلقت منه المقذوفة.

لاحظ أن هذا هو أحد قوانين نيوتن للحركة (يدرس في الفيزياء) وقد يدرسه الطلاب بعد ذلك في الميكانيكا.

$(h = zt + \frac{1}{2}ct^2)$ حيث (c) التسارع.

المثال العددي

$2x^2 + 6 + 1 = 0$

بالقسمة على 2

$x^2 + \frac{6}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 3x = -\frac{1}{2}$

حل المعادلة: $2x^2 + 6x + 1 = 0$

من ذلك نستنتج أن

الصورة العامة

$ax^2 + bx + c = 0$

بالقسمة على $a \neq 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ *

وإذا كان $b^2 - 4ac \geq 0$

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$

$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$

$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$

ملاحظة: إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فالمعادلة * مستحيلة الحل.

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

حل المعادلة:

$ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq$ صفر هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال (٢)

حل المعادلة:

$x^2 + 10x = -16$ باستخدام القانون

ثم تحقق من صحة النتائج باستخدام التحليل.

الحل

$x^2 + 10x + 16 = 0$ (بوضع المعادلة على الصورة العامة)

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

$ax^2 + bx + c = 0$

$a = 1, b = 10, c = 16$

٥٤

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 36$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = 6$ وبالتعويض في القانون

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-10 \pm 6}{2 \times 1}$

$x = \frac{-10 + 6}{2}$ أو $x = \frac{-10 - 6}{2}$

$x = \frac{-4}{2}$ أو $x = \frac{-16}{2}$

$x = -2$ أو $x = -8$

وهو ما حصلنا عليه في مثال (1) باستخدام إكمال المربع

وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

مثال (٣)

حل المعادلة: $2x^2 + 4x - 7 = 0$

الحل

$a = 2, b = 4, c = -7$

$b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-7) = 72$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{72}}{4}$

$x_1 = \frac{-4 + 6\sqrt{2}}{4} = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \frac{-4 - 6\sqrt{2}}{4} = \frac{-2 - 3\sqrt{2}}{2}$

مثال (٤) تطبيقات حياتية

حركة الصواريخ

قامت جمعية العلوم بعمل نموذج صاروخ، وتم إطلاقه من الأرض بسرعة 96 قدم/ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع 128 قدماً؟ علماً بأن العلاقة بين الارتفاع (h) بالقدم، الزمن (t) بالثانية، وسرعة الإطلاق (v) بالقدم/ثانية، h_0 الارتفاع الذي أطلق منه بالقدم يعطى بالعلاقة:

٥٥

Draft

٧. أخطاء متوقعة:

قد يرتكب الطلاب أخطاء في تحديد المعاملات a، b، c في المعادلة من الدرجة الثانية. أرشدهم إلى ترتيب المعادلة أولاً على الترتيب $ax^2 + bx + c = 0$

٨. التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين باستخدام المميز $\triangle$. تأكد من حسن استخدام القوانين لإيجاد الجذرين n وm. ناقش مع الطلاب شروط المميز $\triangle$ لنحصل على جذور حقيقية.

٩. مسألة اليوم:

اشترى محمد 13 بطاقة مسرح ودفع 1 550 ليرة سورية. يبلغ سعر كل بطاقة للأولاد 70 ليرة سورية وكل بطاقة للكبار 150 ليرة سورية. ما عدد بطاقات الكبار التي اشتراها محمد؟

[8 بطاقات]

١٠. إجابات وحلول:

حلول تمارين (الفقرة الأولى) ص ٥٢

(١) $x = -2$ أو $x = 0$

(٢) $x = \frac{5}{3}$ أو $x = 0$

(٣) $x = -2\sqrt{\frac{6}{7}}$ أو $x = 2\sqrt{\frac{6}{7}}$

(٤) لا جذور حقيقية

(٥) $x = 0$

(٦) $x = 0$

حلول تمارين ص ٥٦

انصح الطلاب بأن يحددوا في كل مسألة قيم a, b, c و$\triangle = b^2 - 4ac$ ليسهل لهم التعويض في القانون.

(١) $a = 6, b = 7, c = -5$

$$\triangle = b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 6 \times (-5) = 169$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 13$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{12}$$

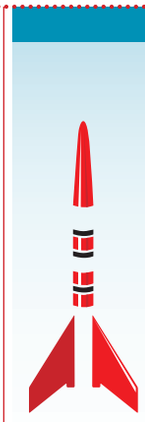
$$x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = -\frac{5}{3}$$

التحقق:

$$6 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{2} - 5 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 5 = 0$$

$$6 \times \frac{25}{9} + 7 \times \left(-\frac{5}{3}\right) - 5 = \frac{50}{3} - \frac{35}{3} - 5$$

$$= \frac{15}{3} - 5 = 0$$



$$h = -16t^2 + vt + h_0 \quad (1)$$

الحل

بالتعويض في (1) عن h، v، t

حيث $h_0 = 0$ (لأنه أطلق من الأرض) نجد أن:

$$-16t^2 + 96t = 128 \quad (2)$$

وبوضع (2) بالصورة العامة

$$-16t^2 + 96t - 128 = 0$$

$a = -16$، $b = 96$، $c = -128$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac = 96 - 4 \times (16) \times (-128)$$
$$= 9216 - 8192 = 1024$$
$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{1024} = 32$$

$$t = \frac{-96 \pm 32}{2 \times (-16)}$$

$$t = \frac{-96 + 32}{-32} = \frac{-64}{-32} = 2$$

أو

$$t = \frac{-96 - 32}{-32} = \frac{-128}{-32} = 4$$

الصاروخ يكون على ارتفاع 128 قدماً من نقطة إطلاقه بعد ثانيتين، 4 ثوان (فسّر النتيجتين).

تمارين

استخدم القانون العام لحل المعادلات الآتية:

١- $6x^2 + 7x - 5 = 0$

٢- $7x^2 = 13$ (لاحظ أن $b = 0$)

٣- $9x^2 - 5x = 0$ (لاحظ أن $c = 0$)

٤- قذفت رصاصة رأسياً إلى أعلى بسرعة (v) تساوي 41 متر/ثانية. احسب الفترة الزمنية (t) بالثانية التي تستغرقها الرصاصة حتى تصل إلى ارتفاع (h) يساوي 80 متراً علماً بأن العلاقة بين h، t هي كالآتي:

$$h = vt - 4.9t^2$$

٥- يقدر نمو السكان في إحدى الدول بحسب العلاقة الآتية بعد عام 2000

$$P = n^2 + 1.2n + 65$$

حيث (P) عدد السكان بالمليون، (n) عدد السنوات بعد عام 2000

المطلوب: (أ) كم كان عدد السكان عام 2000؟

(ب) احسب تقدير عدد سكان هذه الدولة عام 2025.

(ج) احسب أقرب عدد من السنوات التي يبلغ بعدها عدد سكان هذه الدولة 265 مليوناً.

٥٦

استخدام المميز Using the discriminant

من القانون العام لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالآتي:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يسمى $\triangle = b^2 - 4ac$ **المميز**، قد يكون الناتج عدداً موجباً أو صفراً أو عدداً سالباً لأنه يميز لنا نوع جذري المعادلة من حيث كونهما:

عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجباً

أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفراً

أو لا حلول حقيقية، إذا كان المميز سالباً

ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال (١)

أوجد نوع جذري المعادلة

$$2x^2 + 2x - 3 = 0$$

الحل

$a = 2, b = 2, c = -3$

المميز

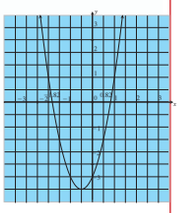
$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$
$$= 4 + 24 = 28$$

وحيث إنه عدد موجب

إذن، الجذران عددان حقيقيان مختلفان

يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة

$$2x^2 + 2x - 3 = 0$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{-2 + \sqrt{28}}{4} = \frac{-2 + 5.29}{4} = \frac{3.29}{4} = 0.82$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{28}}{4} = \frac{-2 - 5.29}{4} = \frac{7.29}{4} = -1.82$$

ومن الواضح أن الجذرين عبارة عن عددين حقيقيين مختلفين.

مثال (٢)

أوجد نوع جذري المعادلة

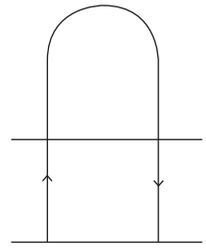
$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

٥٧

Draft

(٢) $x = \pm\sqrt{\frac{13}{7}}$

(٣) $x = 0$ أو $x = \frac{5}{9}$



(٤) $4.9\,t^2 - 41\,t + 80 = 0$

t تساوي 5.27 أو 3.1 ثانية

(الوصول إلى الارتفاع (80) يحدث مرتين أثناء الصعود ثم أثناء النزول.)

(٥) (أ) عدد السكان عام 2000 يساوي 65 مليوناً

(دع الطلاب يخمنون بمجرد النظر إلى العلاقة، ويتم التحقق أو الحل بوضع $n = 0$ في العلاقة.)

(ب) ضع $n = 25$ في العلاقة.

(ج) حل المعادلة $n^2 + 1.2n + 65 = 265$

أي $n^2 + 1.2n - 200 = 0$

n تساوي 13 سنة تقريباً ويهمل الحل السالب.

استخدام المميز ص ٥٧

- يفضل توضيح التمثيل البياني للدوال من الدرجة الثانية، وتوضيح أن الشكل يكون بصفة عامة في إحدى الصورتين ∪ أو ∩ (القطع المكافئ).
- لاحظ أن رأس المنحنى في الدالة على الصورة:

$$y = ax^2 + bx + c$$

هو عند $x = \frac{-b}{2a}$

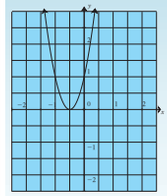
- اطلب من الطلاب إعطاء معادلات يكون فيها:

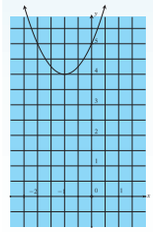
(أ) المميز عدداً موجباً (جذران حقيقيان مختلفان).
المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين.

(ب) المميز يساوي صفراً (جذران حقيقيان متساويان).
المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحدة (يمس محور السينات).

(ج) المميز سالباً (جذران تخيليان). المنحنى لا يقطع محور السينات، ويكون بكامله أعلى أو أسفل محور السينات.

عند التمثيل البياني دع الطلاب يلاحظوا أن:
رأس المنحنى يكون إلى أعلى ∩ في حالة معامل x^2 سالباً.
يكون الرأس إلى أسفل ∪ في حالة معامل x^2 موجباً.
من خلال ورقة عمل معدة سابقاً، دع الطلاب يلاحظون العلاقة بين حلول المعادلة ونقط تقاطع الشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية مع المحور السيني.





الحل

$a = 4, b = 4, c = 1$

المميز: $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 4 \times 1$

$= 16 - 16 = 0$

وحيث إن المميز يساوي صفراً

$x = \frac{-4 \pm 0}{4 \times 2} = \frac{-4 + 0}{8} = -\frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-4 - 0}{8} = -\frac{1}{2}$

أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{1}{2}$.

مثال (٣)

أوجد نوع الجذرين للمعادلة

$x^2 + 2x + 5 = 0$

الحل

$a = 1, b = 2, c = 5$

المميز: $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$

وهذا عدد سالب

ليس للمعادلة جذور حقيقية.

تمارين (٢)

أوجد نوع الجذرين في كل من المعادلات الآتية.

١- $x^2 - 4x + 4 = 0$

٢- $x^2 - 4x + 5 = 0$

٣- $x^2 - 4x + 3 = 0$

٤- $7x^2 - 5x + 2 = 0$

وحقق النتائج بحل المعادلة.

٥٨

كثيرات الحدود من الدرجة الثانية في متغير واحد
Polynominals in Degree 2 with One Variable

تكون كثيرات الحدود من الدرجة الثانية في متغير واحد عندما تأخذ شكل:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث x هو المتغير وa، b، c هي أعداد حقيقية و$a \neq 0$.

مثال

$f(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

أو

$f(x) = \frac{-3}{2}x^2 + x + \sqrt{2}$

نسمي جذر كثيرة الحدود كل قيمة للمتغير x تجعل $f(x) = 0$.
مثلاً 1، 5− هما جذرا $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$

الشكل القانوني لكثيرة الحدود من الدرجة الثانية

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$
$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

الصورة:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

تسمى الشكل القانوني لـ $f(x)$؛
أما $b^2 - 4ac$ فتسمى المميز ويرمز إليها بـ Δ.

تحليل $f(x)$ إلى عوامل.

باستخدام المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

نستطيع معرفة ما إذا كنا نستطيع تحليل $f(x)$ إلى عوامل أم لا.

٥٩

Draft

اطلب من الطلاب تمثيل الدوال:

$$y = x^2 - 1$$
$$y = -x^2 + 1$$
$$y = x^2 + 1$$

وحاول منها حل:

١. المعادلة $x^2 - 1 = 0$

٢. المعادلة $-x^2 + 1 = 0$

٣. المعادلة $x^2 + 1 = 0$

وملاحظة الفروق في بيانات الدوال الثلاث وربطها بحلول المعادلات.

حلول التمارين ص ٥٨

المطلوب هنا إيجاد نوعي الجذرين بدون حل المعادلة (إلا إذا طلب التحقق من الحل.)

(١) $\triangle = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 4$

$16 - 16 = 0$

حقيقيان متساويان

(٢) $\triangle = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 5$

$16 - 20 = -4$ سالب

تخيليان

(٣) $\triangle = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 3$

$16 - 12 = 4$ موجب

حقيقيان مختلفان

(٤) $\triangle = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 7 \times 2$

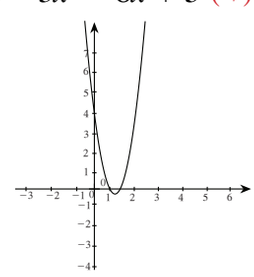
$25 - 56 = -31$ سالب

تخيليان

حلول تمارين (كثيرات الحدود)

(١) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$

$$\triangle = b^2 - 4ac$$
$$= 4$$
$$\triangle > 0$$



$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{3}, \quad a = 3 > 0$$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لنأخذ الشكل القانوني:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

(أ) إذا كان $\Delta < 0$ فإن $-\Delta > 0$ و $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$

وبهذه الحالة لا نستطيع تحليل $f(x)$ إلى عوامل.

(ب) إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(x)$ تكتب على الصورة:

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ أي $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

(ج) إذا كان $\Delta > 0$، فإن $f(x)$ تكتب على الصورة:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

فإذا سمينا $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

نستطيع كتابة $f(x)$ على الصورة: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

وبالتالي نستطيع معرفة إشارة $f(x)$.

دراسة إشارة $f(x)$:

١–إذا كان المميز سالباً فإن إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a أي

إذا كان $a < 0$ تكون $f(x) < 0$ لكل قيم x.

وإذا كان $a > 0$ تكون $f(x) > 0$ لكل قيم x.

٢–إذا كان المميز يساوي صفراً $(\Delta = 0)$ فإن $f(x)$

تكتب على الصورة $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ والجذر هو $x = \frac{-b}{2a}$.

مما يجعل $f(x)$ تساوي صفراً.

أما إذا كان $x \neq \frac{-b}{2a}$ فإن $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$

وبالتالي تكون إشارة $f(x)$ مشابهة لإشارة a.

٣–إذا كان المميز موجباً فإن $f(x)$ تكتب على الصورة

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

وبالتالي $f(x) = 0$ لها جذران $x = x_1$ أو $x = x_2$ (لنفرض أن $x_1 < x_2$)

من أجل $a > 0$ فإن $f(x) > 0$ على المجال $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

و $f(x) < 0$ على المجال $]x_1, x_2[$

ومن أجل $a < 0$ فإن $f(x) > 0$ على المجال $]x_1, x_2[$

$f(x) < 0$ على المجال $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

نستطيع جمع هذه الدراسة كما يلي:

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $f(x)$ تأخذ إشارة a.

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $f(x) = 0$ إذا كان $x = \frac{-b}{2a}$

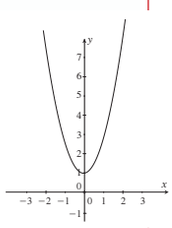
وفيما عدا هذه القيمة تأخذ $f(x)$ إشارة a.

إذا كان $\Delta > 0$ فإن $f(x) = 0$ إذا كان $x = x_1$ أو $x = x_2$ وتأخذ $f(x)$

إشارة a خارج الجذرين وإشارة $(-a)$ بين الجذرين.

نستطيع ملاحظة هذه الدراسة بيانياً كما يلي:

إذا كان $\Delta < 0$ فإن الرسم البياني يصبح كما يلي:



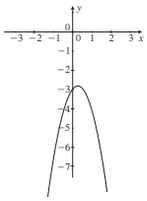
مثال (١)

الرسم البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x + 1$ لا يقطع المحور السيني إذن $\Delta < 0$.

لا جذور حقيقية للمعادلة $f(x) = 0$ بينما كثيرة الحدود $f(x)$ هي موجبة مهما كانت قيمة المتغير x (لاحظ أن $a > 0$).

Draft

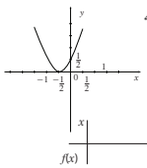
مثال (٢)



الرسم البياني للدالة $f(x) = -x^2 + x - 3$
لا يقطع المحور السيني إذن $\Delta < 0$.

مثال (٣)

الرسم البياني للدالة
$f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ مماس
للمحور السيني إذن $\Delta = 0$.

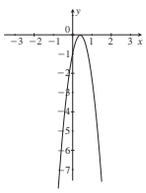


هناك جذران حقيقيان متساويان للمعادلة $f(x)$ قيمته الإحداثي السيني لنقطة المماس.
إشارة $f(x)$ هي موجبة مهما كانت قيمة المتغير x،
$x \neq \frac{-1}{2}$ بينما $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

جدول الإشارات

x		$-1/2$	
$f(x)$	$+$	0	$+$

مثال (٤)



الرسم البياني للدالة $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$

مماس للمحور السيني. إذن $\Delta = 0$.

هناك جذران حقيقيان متساويان

للمعادلة $f(x) = 0$ قيمته الإحداثي

السيني لنقطة المماس.

إشارة $f(x)$ هي سالبة مهما كانت

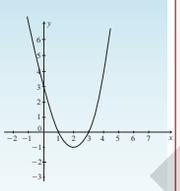
قيمة x، $x \neq \frac{1}{3}$ بينما $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

جدول الإشارات

x	$-\infty$		$-1/3$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

مثال (٥)

الرسم البياني للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$ يقطع المحور السيني في نقطتين إذن $\Delta > 0$. هناك جذران حقيقيان للمعادلة $f(x) = 0$ تساوي قيمتاهما الإحداثيين السينيين لنقطتي التقاطع $A(1, 0)$ و $B(3, 0)$.

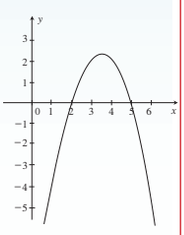


جدول الإشارات

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مثال (٦)

الرسم البياني للدالة $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ يقطع المحور السيني في نقطتين إذن $\Delta > 0$. هناك جذران حقيقيان للمعادلة $f(x) = 0$ تساوي قيمتاهما الإحداثيين السينيين لنقطتي التقاطع $A(2, 0)$ و $B(5, 0)$.



جدول الإشارات

x		2		5	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

تمارين

ارسم بيانياً الدوالّ الآتية ثم حدد إشارة المميز Δ وجذور المعادلة إذا وجدت وجدول الإشارة.

١- $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$
٢- $f(x) = -x^2 - x - 6$
٣- $f(x) = x^2 - 2x + 1$
٤- $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة

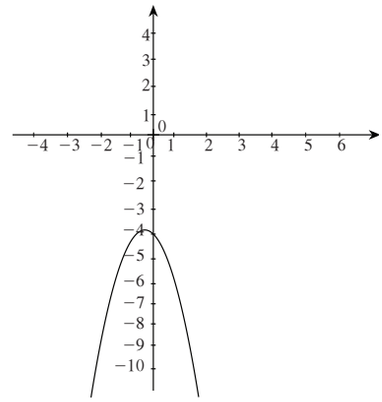
اعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$، $a \neq 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مجموع جذري المعادلة S

$$S = x_1 + x_2$$
$$= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(٢) $f(x) = -x^2 - x - 6$



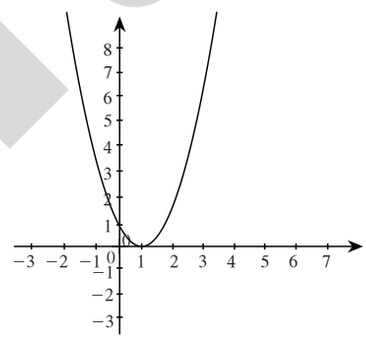
$\Delta = -23$
$\Delta < 0$

لا جذور للمعادلة

$a = -1 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

(٣) $f(x) = x^2 - 2x + 1$



$\Delta = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = 1$

$a = 1 > 0$

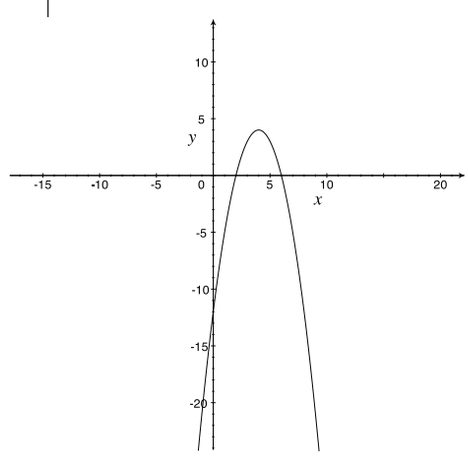
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

(٤) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

$\Delta = 16 \quad \Delta > 0 \qquad a = -1 < 0$

$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2$

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



Draft

ناتج جمع وناتج ضرب جذري المعادلة

التعلم التعاوني في مجموعات يكون هنا مناسباً، ويمكنك إعطاء معادلة لكل مجموعة، ويجب أن تلاحظ كل مجموعة في المثال المعطى لها ناتج جمع الجذرين وناتج ضرب الجذرين، ثم تطلب الملاحظة التي يستنتج منها القانون العام:

$$m + n = \frac{-b}{a}$$

$m \times n = \frac{c}{a}$ في جميع الحالات

بعد ذلك يطلب البرهان ليقوم به الطلاب كواجب منزلي.

حلول تمارين ص ٦٦

(١) $(x - 2)(x + 5) = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

حل آخر

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ ناتج ضرب الجذرين $= 0$

$x^2 - (2 - 5)x + (2 \times -5) = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

مثلاً: اضرب المعادلة السابقة في (2) ثم في (3) ثم في (−1)

تحصل على ثلاث معادلات جذري كل منها هما 2 و −5

(٢) $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{16} = 0 \ldots$

(ضعها في صورة غير كسرية.)

(٣) ناتج جمع الجذرين: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{5}{6}$

ناتج جمع ضرب الجذرين:

$$\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} = \frac{1}{6}$$

إذن المعادلة المطلوبة على الصورة: $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$

(٤) $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$

$(2)^2 - 2(3) = 4 - 6 = -2$

$m^2 \times n^2 = (mn)^2 = (+3)^2 = 9$

المعادلة المطلوبة على الصورة: $x^2 + 2x + 9 = 0$

حلول التمارين العامة ص ٦٦، ٦٧

(١) (أ) $\frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}$

(ب) $2 \pm 3\sqrt{5}$ ؛ الطريقة نفسها ...

(ج) ليس لها حلول

(د) $\frac{-5 \pm \sqrt{109}}{6}$

$= \frac{-2b}{2a}$

$= \frac{-b}{a}$

ناتج ضرب جذري المعادلة: P

$$P = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

أي أنه

إذا كان جذرا المعادلة

$ax^2 + bx + c = 0$ هما x_1، x_2

فإن

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

مثال (١)

دون حل المعادلة أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

$3x^2 + 2x - 3 = 0$

الحل

$a = 3, b = 2, c = -3$

مجموع الجذرين:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-2}{3}$

ناتج ضرب الجذرين

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{3} = -1$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

مثال (٢)

إذا كان مجموع جذري المعادلة $2x^2 + bx - 5 = 0$ يساوي 1 فأوجد b ثم حل المعادلة.

الحل

$\frac{-b}{a} = \frac{-b}{2}$

$\frac{-b}{2} = 1$ ومنه $b = -2$ وتكون المعادلة: $2x^2 - 2x - 5 = 0$

حل المعادلة: $2x^2 - 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac = 4 - 4(2)(-5) = 44$

$$x = \frac{-(-2) \pm 2\sqrt{11}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

الجذران هما: $\frac{1 - \sqrt{11}}{2}, \frac{1 + \sqrt{11}}{2}$

إيجاد المعادلة إذا علم جذراها:

لتكن المعادلة هي $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$

تكتب المعادلة $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

ليكن x_1 و x_2 جذري المعادلة

عندئذ: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

أي $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -S$

$\frac{c}{a} = x_1 x_2 = P$

وبالتالي تكتب المعادلة $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

$x^2 - Sx + P = 0$

مثال (٣)

أوجد المعادلة التي جذراها 3، 5.

الحل

بما أن الجذرين هما 3، 5 إذن $S = 8$ و $P = 15$

المعادلة: $x^2 - 8x + 15 = 0$

أو حل آخر: $(x - 3)(x - 5) = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

Draft

(٢) (أ) حقيقيان مختلفان (ب) تخيليان

(ج) تخيليان

(٣) ناتج جمع الجذرين: $(x_1 + x_2) + 6 = 7$

ناتج ضربهما:

$$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 6$$

المعادلة المطلوبة:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

(٤) لتكن x المسافة المطلوبة.

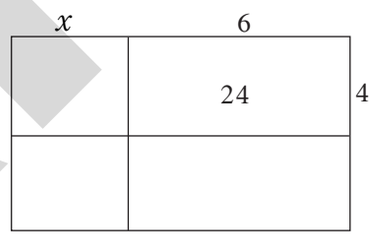
$$(6 + x) \times (x + 4) = 2 \times 6 \times 4$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

تعطي:

$x = 2$ أو $x = -12$

المسافة المطلوبة هي 2 m لأن المسافة لا تكون سالبة.



تفكير ناقد

ملاحظة هامة:

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كل منهما x_1، x_2 وكل منها على الصورة $K[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = 0$ حيث (K) أي عدد حقيقي $\neq$ صفر.

فمثلاً:

إذا كان الجذران هما 3، 5 فإن كلا من المعادلات الآتية لها نفس هذين الجذرين.

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$3(x^2 - 8x + 15) = 0$

$-(x^2 - 8x + 15) = 0$

$7(x^2 - 8x + 15) = 0$ ... وهكذا

تمارين

١–اكتب ثلاث معادلات جذرا كل منها 2، 5 –.

٢–أوجد معادلة جذراها $\frac{5}{4}$ و $\frac{1}{4}$.

٣–ليكن x_1، x_2 الجذرين الحقيقيين للمعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$، احسب $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ من دون حل المعادلة.

إرشاد: ليكن الجذران للمعادلة $x^2-5x+6=0$

هما x_1، x_2 $x_1 x_2 = 6, x_1 + x_2 = 5$

مجموع الجذرين = $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{5}{6}$

٤–أوجد المعادلة التي جذراها مربع جذري المعادلة $3x^2 - 6x + 9 = 0$

إرشاد: مجموع جذري المعادلة المطلوبة $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ وأكمل.

تمارين عامة

١–حل المعادلات الآتية:

(أ) $4x^2 = 8x - 3$ (ب) $x^2 + 4x = 41$

(ج) $2x^2 + 8x + 16 = 0$ (د) $3x^2 + 5x - 7 = 0$

٢–أوجد نوع جذري المعادلة:

(أ) $3x^2 + x - 1 = 0$ (ب) $-x^2 + 5x - 7 = 0$ (ج) $x^2 - 2x + 3 = 0$

٣–إذا كان x_1، x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها $x_2 + 3, x_1 + 3$

٤–قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه 4، 6 أمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بُعد من أبعادها نفس المسافة (مسافات متساوية). أوجد طول المسافة المضافة.

تفكير ناقد

ملاحظة هامة:

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كل منهما x_1، x_2 وكل منها على الصورة $K[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = 0$ حيث (K) أي عدد حقيقي $\neq$ صفر.

فمثلاً:

إذا كان الجذران هما 3، 5 فإن كلا من المعادلات الآتية لها نفس هذين الجذرين.

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$3(x^2 - 8x + 15) = 0$

$-(x^2 - 8x + 15) = 0$

$7(x^2 - 8x + 15) = 0$ ... وهكذا

تمارين

١–اكتب ثلاث معادلات جذرا كل منها 2، 5 –.

٢–أوجد معادلة جذراها $\frac{5}{4}$ و $\frac{1}{4}$.

٣–ليكن x_1، x_2 الجذرين الحقيقيين للمعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$، احسب $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ من دون حل المعادلة.

إرشاد: ليكن الجذران للمعادلة $x^2-5x+6=0$

هما x_1، x_2 $x_1 x_2 = 6, x_1 + x_2 = 5$

مجموع الجذرين = $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{5}{6}$

٤–أوجد المعادلة التي جذراها مربع جذري المعادلة $3x^2 - 6x + 9 = 0$

إرشاد: مجموع جذري المعادلة المطلوبة $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ وأكمل.

تمارين عامة

١–حل المعادلات الآتية:

(أ) $4x^2 = 8x - 3$ (ب) $x^2 + 4x = 41$

(ج) $2x^2 + 8x + 16 = 0$ (د) $3x^2 + 5x - 7 = 0$

٢–أوجد نوع جذري المعادلة:

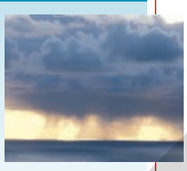
(أ) $3x^2 + x - 1 = 0$ (ب) $-x^2 + 5x - 7 = 0$ (ج) $x^2 - 2x + 3 = 0$

٣–إذا كان x_1، x_2 هما جذرا المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$

أوجد المعادلة التي جذراها $x_2 + 3, x_1 + 3$

٤–قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه 4، 6 أمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بُعد من أبعادها نفس المسافة (مسافات متساوية). أوجد طول المسافة المضافة.

١١



٥–أوجد المعادلة التي جذراها ضعفا جذري المعادلة $3x^2 - 8x + 4 = 0$

٦–بفرض أن معادلة التوقع بدرجات الحرارة في المناطق الساحلية على الصورة: $y = ax^2 + bx + 10.6$ حيث (y) تمثل درجة الحرارة المئوية العظمى، (x) رقم الشهر الميلادي، وكانت درجات الحرارة في أشهر كانون الثاني وآذار وحزيران كما بالجدول الآتي:

المطلوب:

الشهر (x)	درجة الحرارة (y)
1	13
3	19
6	31

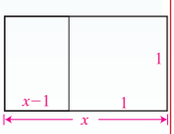
(أ) أوجد قيمة الثابتين a، b.

(ب) عيّن الشهر الذي من المحتمل أن تصل فيه درجة الحرارة (في المتوسط) $27°$

٧–النسبة الذهبية

النسبة الذهبية (x) هي النسبة بين طول "المستطيل الذهبي" وعرضه، وتحصل عليها من تشابه المستطيلين. وللحصول على النسبة الذهبية (x) نحل المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ ونأخذ الحل الموجب.

أوجد النسبة الذهبية.



قذف اللاعب حسام الكرة رأسياً لأعلى، فإذا كانت العلاقة بين الارتفاع (h) الذي تصل إليه الكرة بالمتر والزمن الذي تستغرقه للوصول إلى هذا الارتفاع (t) ثانية هي: $h = -4.9t^2 + 15t$

المطلوب:

(أ) حساب الزمن الذي تستغرقه الكرة لتصل إلى ارتفاع 6 أمتار.

(ب) هل يمكن للكرة أن تصل إلى ارتفاع 15 متراً؟ فسّر إجابتك.

٨–تفكير ناقد:

احسب مجموعة قيم الثابت c في المعادلة $3x^2 + 12x + c = 0$ بحيث يكون للمعادلة:

(أ) جذران حقيقيان متساويان

(ب) جذران حقيقيان مختلفان

(ج) مستحيلة الحل في IR (للمعادلة جذران تخيليان)

Draft

(٥) $m + n = \frac{8}{3}$ ، $(mn) = \frac{4}{3}$

$$2m + 2n = 2(m + n) = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$2m \times 2n = 4(mn) = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

المعادلة المطلوبة

$$x^2 - \frac{16x}{3} + \frac{16}{3} = 0$$

اطلب حلاً آخر (حل المعادلة الأصلية، أوجد الجذرين، ضاعفهما، كون المعادلة الجديدة).

(٦) (أ) $y = ax^2 + bx + 10.6$

بالتعويض عن $x = 1$ ثم $x = 3$

(١) $13 = a + b + 10.6$

(٢) $19 = 9a + 3b + 10.6$

وبحل المعادلتين (١) و(٢)

$a = 0.2,\ b = 2.2$

$y = 0.2x^2 + 2.2x + 10.6$

(ب) $27 = 0.2x^2 + 2.2x + 10.6$

الشهر المحتمل هو شهر أيار

(٧) $x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

النسبة الذهبية هي $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(٨) (أ) $4.9t^2 - 15t + 6 = 0$

ثانية $t \approx 2.6$ أو $t \approx 0.47$

(ب) $15 = -4.9t^2 + 15t$

$4.9t^2 - 15t + 15 = 0$

المميز سالب، لا يوجد حل حقيقي أي أنه لا يمكن أن تصل الكرة إلى ارتفاع 15 m.

(٩) $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times 3c$

$= 144 - 12c$

(أ) $144 - 12c = 0 \Rightarrow c = 12$

(جذران حقيقيان متساويان)

(ب) $144 - 12c > 0 \Rightarrow c < 12$

(جذران حقيقيان مختلفان)

(ج) $144 - 12c < 0 \Rightarrow c > 12$

(جذران تخيليان)

معادلات تتحول إلى الدرجة الثانية
Equations Converted into Quadratic Equations

(١) المعادلات التي تكتب بالشكل الآتي:

$\sqrt{A} = B$ ويسمى هذا النوع من المعادلات، المعادلات غير النسبية حيث A تابع للمتغير x، B تابع للمتغير x

ويمكن أن نجد معادلة كما يلي: $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

في حال المعادلة: $\sqrt{A} = B$ نضع شرطاً

وهو $B \geq 0$ وهذا الشرط يغني عن $B \geqslant 0$ و $A \geqslant 0$.

أما في الحالة الثانية فالشرط هو:

$A \geqslant 0$ و $B \geqslant 0$ وطريقة الحل تقتضي

برفع طرفي المعادلة للأس 2 ثم نتأكد من أن الأجوبة تستوفي الشرط المفروض.

مثال (١)

حل المعادلة: $\sqrt{2x + 5} = x - 3$

الشرط هو: $x - 3 \geqslant 0$ أي $x \geqslant 3$

وعند رفعنا للأس 2 نحصل على: $2x + 5 = (x - 3)^2$

أي $x^2 - 8x + 4 = 0$ وباستخدامنا للمميز نحصل على:

$x_1 = 4 + 2\sqrt{3}$ و $x_2 = 4 - 2\sqrt{3}$

بما أن $4 - 2\sqrt{3}$ ليس أكبر من 3 فإن هذا الجواب هو مرفوض وبذلك يكون للمعادلة جذر واحد هو $4 + 2\sqrt{3}$.

(٢) المعادلات التي تكتب بالشكل:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ مع $a \neq 0$

(وهذا النوع من المعادلات لا يحتوي x ولا x^3

وطريقة الحل تقتضي استبدال x^2 بمتغير آخر هو y مثلاً $(y \geqslant 0)$ وبالتالي نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في المتغير y وبعد الحصول على y نعود إلى المتغير الأساسي x)

مثال (٢)

حل المعادلة: $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

نستبدل x^2 بـ y حيث $y \geqslant 0$ فنحصل على: $5y^2 - 6y + 1 = 0$

بواسطة المميز نحصل على: $y_1 = \frac{1}{5}; y_2 = 1$

بالعودة إلى x نحصل على: $x^2 = \frac{1}{5}; x^2 = 1$

وهنا نجد أربعة جذور: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \sqrt{\frac{1}{5}}, x_4 = -\sqrt{\frac{1}{5}}$

ملاحظة: **هذا النوع من المعادلات له إما: أربعة جذور أو جذران أو لا جذور حقيقية.**

تطبيقات

(١) المعادلات التي تكتب بالشكل الآتي:

$A \times B \times C \times .... = 0$

ويكون حل هذه المعادلات بالطريقة الآتية:

نأخذ كل عامل يساوي صفراً ونحل المعادلة التي نحصل عليها:

$A = 0, B = 0, C = 0, ...$

مثال (٣)

حل المعادلة: $(5x^2 - 6)(3x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 4x) = 0$

نأخذ كل عامل يساوي صفراً:

$5x^2 - 6 = 0$

$5x^2 = 6$

$x^2 = \frac{6}{5}$

$x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$

Draft

ونحصل على: $x_1 = 1$ و $x_2 = 8$

هذان الجذران مقبولان لأنهما لا يساويان 5− وبالتالي يكون للمعادلة جذران حقيقيان: 1، 8

تمارين

حل كل من التمارين الآتية:

١− $(x^2 - 2x + 5)^2 - (x^2 + 3x + 1)^2 = 0$

٢− $(2x + 5)(x^2 - 3x + 8) = 0$

٣− $(x^2 + 5x + 6)^2 = (x^2 - 3x + 6)^2$

٤− $\frac{x^2 + 25x + 24}{x - 3} = 0$

٥− $\frac{x^2 + 30x + 24}{x + 3} = 0$

٦− $\frac{x^3 - 9x^2 + 8x}{x^2 - 4} = 0$

٧− $\sqrt{x^2 + 5} = x + 3$

٨− $\sqrt{x + 8} = \sqrt{x^2 + 3x}$

٩− $3x^4 + 16x^2 + 13 = 0$

١٠− $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

١١− $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0$

١٢− $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

أوجد قيم x و y في كل من الحالات الآتية:

١٣− $\begin{cases} x + y = \frac{9}{2} \\ xy = 5 \end{cases}$

١٤− $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = -2 \end{cases}$

١٥− $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = -5 \end{cases}$

٧١

حلول التمارين ص ٧١، ٧٢

(١) تكتب المعادلة بالشكل :

$$(-5x + 4)(2x^2 + x + 6) = 0$$

ونجد لها حلاً حقيقياً واحداً: $x = \frac{4}{5}$

(٢) $x = -\frac{5}{2}$

(٣) تكتب المعادلة بالشكل $8x\,(2x^2+2x+12) = 0$

$$x = 0$$

(٤) الشرط $x_1 = -1,\ x_2 = -24, x \neq 3$

(٥) الشرط $x \neq -3$

$$x_1 = \frac{-30 + \sqrt{804}}{2} \simeq -0,82$$

$$x_2 = \frac{-30 - \sqrt{804}}{2} \simeq -27,17$$

(٦) تكتب المعادلة: $\frac{x(x^2 - 9x + 8)}{x^2 - 4} = 0$

الشرط: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 8,\ x \neq -2,\ x \neq 2$

(٧) الشرط $x \geq -3$ $\quad x = -\frac{2}{3}$

(٨) $x = 2,\ \ x = 4,\ \ x \in [-8, -3] \cup [0, +\infty]$

(٩) لا جذور حقيقية

(١٠) $x_1 = 1;\ x_2 = -6$

(١١) $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2};\ x_3 = \sqrt{2};\ x_4 = -\sqrt{2}$

(١٢) $x_1 = -\frac{2}{3},\ \ x_2 = \frac{2}{3}$

(١٣) $x = 2,\ \ y = \frac{5}{2}$ أو العكس

(١٤) $x = 1;\ y = -3$ أو العكس

(١٥) $x = -1;\ y = 5$

$x = 1;\ y = -5$

(١٦) $x = -\frac{1}{2}\ \ y = -\frac{3}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}\ \ y = \frac{1}{2}$

(١٧) $x_1 = -3;\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{10}}{3};\ x_3 = 1;\ x_4 = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}$

Draft

١٨) الشرط $x \geqslant \frac{1}{2}$ $\quad x = 1$

١٩) الشرط $x \geqslant 3$ $(x = 0)$ لا يستوفي الشرط.

لا حلول حقيقية

٢٠) هناك شرطان $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ و $x \geqslant 2$

وهذا يكافئ $x \geq 3$.

وضمن الشرط $x \geq 3$ تكتب المعادلة :

$$\sqrt{(x-1)(x-3)} = x - 2$$

بالشكل $(x-1)(x-3) = (x-2)^2$

$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4$ وليس للمعادلة حل.

٢١) هناك شرطان: $x \geq 1$ و $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

وهذا يكافئ $x \geq 1$. الحل $x = 1$ مقبول والحل

$x = -3$ مرفوض.

٢٢) الشرط $x \geq -1$ ، $x = \frac{-2}{9}$

٢٣) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-3}{8},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{5}{8}$

٢٤) الشرط $x \geq \frac{1}{3}$ لأن المعادلة تكتب

$\sqrt{(3x-1)^2} = 3x - 1$ مجموعة الحلول $[\frac{1}{3}, +\infty[$

٢٥) الشرط $x \leq 4$ $\quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$

٢٦) $c = -30;\ x_2 = 10$

٢٧) (أ) $q = 15$

(ب) $q = 12$

(ج) $q = 1$

١٦- $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \\ x - y = 1 \end{cases}$

حل كل من المعادلات الآتية:

١٧- $(2x^2 - 3)^2 = (x^2 - 2x)^2$

١٨- $\sqrt{4x^2 - 5x + 2} = 2x - 1$

١٩- $\sqrt{x^2 + 9} = x - 3$

٢٠- $\sqrt{(x-3)(x-1)} = x - 2$

٢١- $\sqrt{(x+2)(x-1)} = \frac{x-1}{2}$

٢٢- $3x - \sqrt{4x^2 - x + 2} = x - 2$

٢٣- $(8x^2 - 5x + 1)^2 - 5(8x^2 - 5x + 1) + 4 = 0$

٢٤- $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 3x - 1$

٢٥- $x - 2 + \sqrt{(3x-4)^2} = 2$

٢٦- أوجد قيمة c إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 - 7x + c = 0$ هو -3 ثم أوجد الجذر الثاني.

٢٧- أوجد قيمة q في المعادلة $x^2 - 8x + q = 0$ في كل من الحالات الآتية:

أ) $3x_1 - 4x_2 = 3$

ب) $x_1^2 + x_2^2 = 40$

ج) $x_1 = \frac{1}{x_2}$

٧٢

Draft

الوحدة ٣

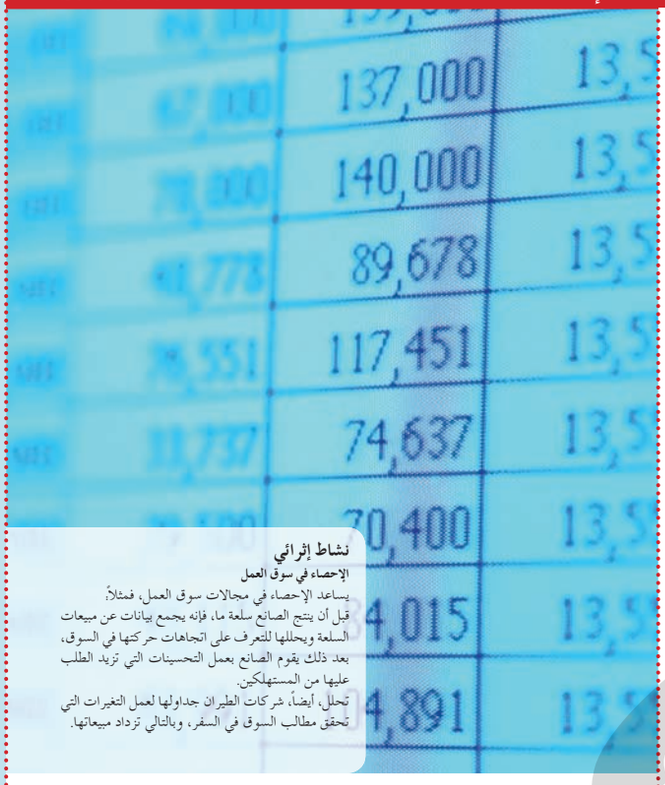
الإحصاء

الأهداف

- حساب مقاييس النزعة المركزية
- المتوسط الحسابي
- الوسيط
- المنوال
- تحليل البيانات
- تحليل النتائج الإحصائية
- الربيعات وتحديدها
- تمثيل الربيعات بواسطة الصندوق وكيفية الاستفادة منه
- الانحراف المعياري وإدراك أهميته في تحليل نتائج البيانات الإحصائية
- المجتمع
- العينات وتناسبها
- العينات العشوائية، المتحيزة وغير المتحيزة

المحتويات

١. تحليل العينات
٢. الربيعات
٣. الانحراف المعياري
٤. العينات



نشاط إثرائي

الإحصاء في سوق العمل

يساعد الإحصاء في مجالات سوق العمل، فمثلاً:
قبل أن ينتج الصانع سلعة ما، فإنه يجمع بيانات عن مبيعات السلعة ويحللها للتعرف على اتجاهات حركتها في السوق، بعد ذلك يقوم الصانع بعمل التحسينات التي تزيد الطلب عليها من المستهلكين.
تحلل، أيضاً، شركات الطيران جداولها لعمل التغيرات التي تحقق مطالب السوق في السفر، وبالتالي تزداد مبيعاتها.

مقدمة

عند الحصول على سلسلة إحصائية، نحاول تحليل المعلومات لجعلها أكثر تعبيراً ولهذا سوف نرتكز على بعض المؤشرات العددية مثل الوسيط والوسط وأيضاً الإرباعيات والانحراف المعياري. تساعد مقاييس التشتت على إعطاء فكرة واضحة عن توزيع البيانات ضمن العينة ولا علاقة لتوزيع هذه البيانات ببعض مقاييس النزعة المركزية كالمنوال مثلاً.
يظهر أن الوسط استعمل للمرة الأولى في القرن السادس عشر في علم الفضاء ولكن الاستعمال المتزايد ظهر خلال العقدين الآتيين. فائدة الوسيط ظهرت في القرن الثامن عشر والانحراف المعياري أدخل عام 1893 بواسطة بيرسون Pearson.
في العام 1945، الإحصائي الإنكليزي يول Yule، في كتابه "مقدمة نظرية الإحصاء" Introduction to the theory of statistics
حدّد الصفات التي تتمناها في المؤشرات العددية واستعمل العينات الإحصائية منذ القدم (مثلاً في الصين 4000 سنة قبل عصرنا).
الإحصاء لم يصبح فرعاً من الرياضيات إلا مؤخراً.

Draft

المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
تحليل البيانات المتوسط الحسابي الوسيط المنوال	المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال	إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة بيانات
الربيعات المدى الانحراف المعياري العينات	الربيع الأدنى الربيع الثالث القيمة المتطرفة الانحراف المعياري العينات غير المنحازة	إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال مع أو بدون القيمة الشاحطة رسم الصندوق ذي العارضتين دراسة معايير النزعة المركزية لاتخاذ قرارات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد معايير النزعة المركزية احتساب هامش الخطأ

Draft

تحليل البيانات Data Analysis

كتاب الطالب من صفحة ٧٥ إلى صفحة ٧٦

١. الأهداف:

- حساب مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات والنتائج الإحصائية

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

النزعة المركزية–المتوسط الحسابي–الوسيط–المنوال–القيمة المتطرفة

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة للإحصاء

٤. التمهيد:

- بلغ عدد نقاط سجلها أحد اللاعبين في بعض مباريات كرة السلة: 16، 21، 18، 40، 22، 20.
- اطلب من الطلاب إيجاد معدل نقاط هذا اللاعب في المباراة الواحدة. اسألهم عن الفرق بين أصغر عدد من النقاط وأكبر عدد. ناقش معهم النقاط الأربعين التي نالها في إحدى المباريات وتأثيرها على معدل نقاطه.

٥. التدريس:

كثيراً ما يخلط بعض الطلاب بين المتوسط الحسابي (mean)، والوسيط (median)، والمنوال (mode). وضح لهم الفروق في المعنى وفي التعريف الرياضي. وتستخدم المصطلحات الثلاثة في مواقف مختلفة لإعطاء صورة عامة عن مجموعة البيانات. وتستخدم كوصف للنزعة المركزية (central tendency)، و«النزعة» تعني الاتجاه العام أو توجهاً يأخذه شيء ما؛ و«مركزي» يعني «عند المركز» أو «تكوين المركز». والمصطلح بكلمتيه معاً يعني اتجاه البيانات بالنسبة إلى مركزها.

– إحدى مميزات «المتوسط الحسابي» أنه يمدنا بقيمة واحدة تمثل مجموعة من البيانات، وأحد محدداته أنه يمكن أن يكون مضللاً إذا كانت بعض البيانات متطرفة (كبيرة جدّاً أو صغيرة جدّاً بالنسبة إلى بقية البيانات).

تحليل البيانات Data Analysis

سوف تتعلم
* تحديد مفهوم المتوسط الحسابي
* تحديد مفهوم الوسيط
* تحديد مفهوم المنوال

دعنا نفكر ونتناقش

أولاً – حساب مقاييس النزعة المركزية Central tendency

الإحصاء: هو دراسة تحليل البيانات وتفسيرها. المتوسط الحسابي (mean)، الوسيط (median)، المنوال (mode) عبارة عن قيم مركزية تساعد في وصف مجموعة من البيانات. وتسمى هذه القيم الثلاث بمقاييس النزعة المركزية، التي تعرّف كالآتي:

المقياس	التعريف	مثال باستخدام الأعداد (1، 2، 2، 3، 5، 5)
المتوسط الحسابي	مجموع قيم البيانات / عددها	$\frac{1+2+2+3+5+5}{6} = 3$
الوسيط	القيمة الوسطى أو متوسط القيمتين الوسطيتين	$\frac{3+2}{2} = 2.5$
المنوال	القيمة الأكثر تكراراً	2 و5

* يمكنك استخدام الرمز $\bar{x}$ (تقرأ x خط)، للدلالة على المتوسط الحسابي.
* لإيجاد الوسيط، رتّب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً. ثم اختر القيمة التي تقسم المجموعة إلى قسمين متساويين.
* إذا لم توجد في مجموعة من البيانات قيمة هي الأكثر تكراراً عن غيرها، فذلك يعني، أنه لا يوجد منوال لهذه البيانات.
* يمكنك أن تستخدم آلة حاسبة متخصصة لحساب قيم النزعة المركزية، أو عندما تعالج عدداً كبيراً أو معقداً من البيانات.

مثال (١) تطبيقات حياتية

جغرافية البحار: الجدول الآتي يبيّن درجات الحرارة (المئوية) للمياه في بعض البحار في إحدى السنوات.

الشهر / البحر	ك٢	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	ت١	ت٢	ك١
الأحمر	13	14	17	22	26	29	30	30	28	23	18	14
المتوسط	17	18	20	23	27	29	30	30	29	26	21	18
الأسود	19	19	22	25	28	30	31	31	30	27	23	20
الميت	13	22	24	26	28	30	31	31	30	28	24	22

٧٥

– إحدى مميزات «الوسيط» أنه لا يتأثر بالبيانات المتطرفة، وأحد محدداته أنه لا يُستخدم في قياسات إحصائية متقدمة مثل حساب الانحراف المعياري.

– إحدى مميزات «المنوال» أنه يسهل الحصول عليه ولا يحتاج إلى حسابات وأحد محدداته أنه لا يظهر وبالتالي لا يطبق إذا كانت كل المفردات في مجموعة من البيانات تظهر مرة واحدة.

– لاحظ أنه لكل مجموعة من البيانات يوجد متوسط حسابي واحد، ووسيط واحد، ولكن قد يوجد أكثر من منوال وقد لا يوجد منوال نهائيّاً.

– من الممكن أن يتساوى لمجموعة من البيانات المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. مثلاً:

المتوسط الحسابي=الوسيط=المنوال

في المجموعة: 6، 6، 5، 5، 4، 4، 3، 2، 1

دع الطلاب يتأكدون من ذلك حسابيّاً بحسب التعريفات المعطاة.

Draft

نبه الطلاب إلى أن كلّاً من المقاييس الثلاثة له معنًى يختلف عن الآخر وطريقة حساب تختلف عن الأخرى.

المتوسط الحسابي هو الأكثر استخداماً لتحليل مجموعة البيانات في الدراسات الإحصائية، ولذلك تأكد من فهمهم له وكيفية حسابه يدويّاً وبالآلة الحاسبة. لاحظ أيضاً أنه سبق لهم دراسته في صفوف الحلقة الثانية من التعليم الأساسي.

– نبه الطلاب إلى أن الحصول على الوسيط لا بد أن يكون بعد ترتيب البيانات.

٦. الربط:

اطلب من الطلاب إيجاد معدّل علامات المواد في أحد أشهر العام الدراسي الحالي. تأكد من أن كل طالب استطاع القيام بذلك. واطلب إلى أحد الطلاب كتابة علاماته على اللوح وناقشه أمام زملائه إذا توصل إلى إيجاد المعدل. واسأله عن وجود علامات متشابهة.

٧. أخطاء متوقعة:

قد يجد الطلاب قيمة الوسيط دون ترتيب المعطيات. مدّ يد المساعدة. اطلب منهم ترتيب المعطيات تصاعديّاً أو تنازليّاً ووضح لهم أهمية الوسيط في البيانات الإحصائية وأشر إلى أن المتوسط الحسابي قد يعطي نتيجة غير دقيقة عن البيانات الإحصائية خصوصاً إذا كان هناك أكثر من قيمة متطرفة.

٨. التقويم:

وزع على الطلاب بياناً إحصائيّاً. اطلب إليهم ترتيب الأعداد تصاعديّاً، وإيجاد المنوال والوسيط والمتوسط الحسابي يدويّاً ثم على الآلة الحاسبة. اسألهم عن قيمة المدى للبيان الإحصائي. واطلب إليهم إيجاد بيان إحصائي له المتوسط الحسابي نفسه ولكن مداه مختلف عن الأول.

٩. مسألة اليوم:

تبيع إحدى المؤسسات الحواسيب، فإذا بيع 25 حاسوباً كان الربح 5 000 ليرة، وإذا بيع 75 حاسوباً كان الربح 15 000 ليرة:

(أ) أوجد الدالة من الدرجة الأولى التي تمثل العلاقة بين عدد الحواسيب والربح المحقق $y = 200x$

(ب) أوجد أرباح هذه المؤسسة إذا باعت 225 حاسوباً

45 000 ليرة سورية

المطلوب في المثال السابق:
أوجد المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال لكل درجات الحرارة المبينة في الجدول.
استخدم آلة حاسبة للإحصاء لإيجاد المطلوب.
أو استخدم حاسبة متخصصة أو برنامج اللوحة الجدولية (Excel) لحساب القياسات السابقة، ثم مثّل البيانات بشكل مدرج تكراري بالنسبة لكل موقع طوال العام، ثم للمواقع الأربعة معاً.

الموقع	المتوسط ($\bar{x}$)	الوسيط	المنوال	أقل درجة	أعلى درجة
البحر الأحمر	22	$\frac{22+23}{2}=22.5$	30	13	30
البحر المتوسط	24	$\frac{23+26}{2}=24.5$	18, 29, 30	17	30
البحر الأسود	25.4	$\frac{25+27}{2}=26$	29, 30, 31	19	31
البحر الميت	25.75	$\frac{26+28}{2}=27$	22, 24, 31	13	31
مجموعة البحار الأربعة	24.29	$\frac{26+26}{2}=26$	30	13	31

تمارين

١– أي من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة في رأيك هو الأكثر دقة في تمثيل الصورة الوسطية لدرجة حرارة مياه البحار بحسب بيانات الجدول السابق؟

٢– **تفكير ناقد:** اذكر أيّاً من المتوسط الحسابي أو الوسيط هو الأكبر في كل من مجموعة البيانات الآتية:

(أ) 10، 10، 10، 12، 12، 20

(ب) 20، 19، 18، 18، 11

٧١

١٠. إجابات وحلول

حلول التمارين ص ٧٦

(١) كل من المتوسط الحسابي والوسيط مناسب لموقع على ساحل البحر المتوسط.

(٢) تفكير ناقد

(أ) المتوسط الحسابي > الوسيط (11 < 12.3)

(ب) الوسيط > المتوسط الحسابي (17.2 < 18)

دع الطلاب يحسبون بأنفسهم أو يخمنون ثم يتأكدون حسابيّاً. شجع الحساب الذهني كلما كان ذلك غير معقد.

Draft

الربيعات Quartiles

كتاب الطالب من صفحة ٧٧ إلى صفحة ٨٠

١. الأهداف:

◄ تحديد الربيعات

◄ تمثيل الربيعات بواسطة الصندوق وكيفية الاستفادة منه

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

الربيعات

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة

٤. التمهيد:

اكتب على اللوح بياناً إحصائيّاً عن علامات طلابك في إحدى المسابقات الشهرية. اطلب منهم ترتيب العلامات تصاعديّاً ثم اسألهم عن قيمة الوسيط. ماذا يعني لهم الوسيط؟

50% من العلامات فوق الوسيط و50% من العلامات تحت الوسيط

٥. التدريس:

– وضح للطلاب أن الصندوق ذا العارضتين يمكن استخدامه كملخص بياني للبيانات المعطاة.

– الربيع الأول هو الوسيط للنصف الأدنى من البيانات، والربيع الثالث هو الوسيط للنصف الأعلى من البيانات، والربيع الثاني هو الوسيط لكل مجموعة البيانات.

– دع الطلاب يربطون بين البيانات وبين التمثيل البياني لها في الصندوق.

بناء على النشاط في التمهيد، اسأل الطلاب إيجاد الوسيط للنصف الأدنى من العلامات واطلب إليهم تسميته Q_1، ثم إيجاد الوسيط للنصف الأعلى من العلامات وتسميته بـQ_3. أما الوسيط للعلامات كاملة فاطلب إليهم تسميته Q_2. دعهم يمثلون العلامات تصاعديّاً على خط الأعداد مع إبراز قيمة كل من Q_1، Q_2، Q_3. اطلب إليهم رسم مستطيل طوله يمتد من قيمة Q_1 حتى قيمة Q_3 ثم قسمه إلى شطرين بواسطة Q_2. هذا المستطيل يمثل صندوق الربيعات Q_1 و Q_2 و Q_3. اشرح لهم أهمية الربيعات في البيانات الإحصائية. ماذا تعني النتائج الموجودة بين Q_1 و Q_3 بالنسبة إلى النتائج؟

الرُبَيعات Quartiles

الرُبَيعات

عند ترتيب مجموعة من البيانات تصاعديّاً، فإن الوسيط يقسم المجموعة إلى قسمين متساويين. وإذا قسمنا كلا من النصفين الأدنى والأعلى إلى نصفين، فإن المجموعة الكلية تنقسم إلى أربعة أجزاء متساوية.

القيم التي تفصل هذه الأجزاء الأربعة تسمى رُبيعات.

* القيمة التي تفصل الربع الأدنى عن الربع التالي له تسمى الرُبيع الأدنى lower quartile، ويرمز لها بالرمز Q_1.
* القيمة التي تفصل الربع الثاني عن الربع الثالث تسمى الرُبيع الثاني، ويرمز لها بالرمز Q_2، وهي في نفس الوقت قيمة الوسيط.
* القيمة التي تفصل الربع الثالث عن الربع الرابع (الأعلى) تسمى الرُبيع الثالث، ويرمز لها بالرمز Q_3.

ويمكن تمثيل الرُبيعات بمخطط على شكل صندوق مركزي ذي عارضتين أي ممتد من الجانبين box–and–whisker plot

فمثلاً إذا أخذنا مجموع البيانات:

56, 58, 58, Q_1 63, 65, 71, Q_2 = الوسيط 74, 78, 82, Q_3 ,84, 85, 86

أي أن:

الرُبَيع الأدنى $Q_1 = \frac{58 + 63}{2} = 60.5$

الوسيط $Q_2 = \frac{71 + 74}{2} = 72.5$

الرُبَيع الثالث $Q_3 = \frac{82 + 84}{2} = 83.0$

سوف تتعلم
* الرُبَيعات
* القيمة المتطرفة

٧٧

Draft

٦. **الربط:**

عندما يجري بعض الطلاب ضمن مجموعات اختبارات في مادة الكيمياء ويدونون نتائجهم ضمن جداول، يستخدم صندوق الربيعات لمقارنة هذه النتائج.

٧. **أخطاء متوقعة:**

قد ينسى بعض الطلاب ترتيب البيانات تصاعديّاً. ذكرهم بضرورة البدء بترتيب البيانات.

٨. **التقويم:**

اطلب إلى الطلاب حل التمارين رقم ٤(أ) أو ٥ (أ) من الصفحة ٧٩ من كتاب الطالب.

٩. **مسألة اليوم:**

أصغر عدد صحيح يمكن كتابته كناتج جمع لمربع عددين صحيحين بطريقتين مختلفتين هو 50 حيث إن:

$$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2 = 50$$

أوجد الأعداد الثلاثة الصحيحة التي تلي العدد 50 ولها الميزة المذكورة نفسها:

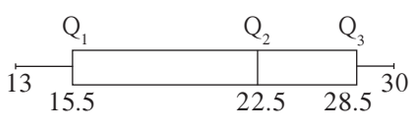
$$8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2 = 65$$
$$9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2 = 85$$
$$11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$

١٠. **إجابات وحلول:**

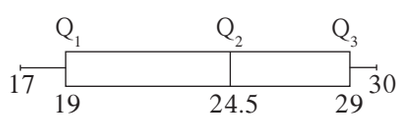
ص ٧٨

(١) (أ) 50% ، (ب) 25%

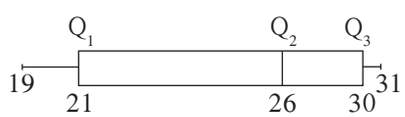
(٢) البحر الأحمر:



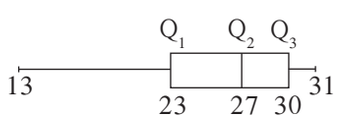
البحر المتوسط:



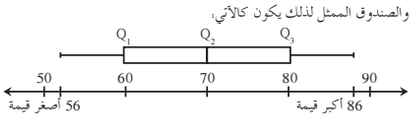
البحر الأسود:



البحر الميت:



والصندوق الممثل لذلك يكون كالآتي:



١– (أ) ما نسبة البيانات التي تقع في الصندوق؟
(ب) ما نسبة البيانات التي تقع على كل من عارضتي الصندوق؟

تدريب

٢– استخدم الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد رُبيعات بيانات درجات الحرارة المعطاة في مثال (١) لكل من البحار المعطاة، ثم استخدم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

القيمة المتطرفة Outlier

القيمة المتطرفة هي إحدى قيم المجموعة من البيانات تكون مختلفة كثيراً عن بقية القيم.
في بعض الأحيان، تكون القيمة المتطرفة عنصراً هامّاً من البيانات، وفي أحيان أخرى، تمثل قراءة خاطئة. إذا تأكدت من أن القيمة المتطرفة، هي مجرد قيمة كتبت بالخطأ فيمكنك استبعادها.

٣– اعتبر مجموعة البيانات الآتية:
56، 64، 73، 59، 98، 65، 59

(أ) تعرف على القيمة المتطرفة.
(ب) احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
(ج) استبعد القيمة المتطرفة من المجموعة، ثم أعد حساب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
(د) ما تأثير استبعاد القيمة المتطرفة عن كل من المقاييس الثلاثة؟

٤– (أ) إذا اعتبرت مجموعة البيانات في (٣) تمثل درجة متوسطات درجات الحرارة للمياه بالفهرنهيت في سبعة مواقع على أحد البحيرات – كيف ستتعامل مع القيمة المتطرفة؟ اشرح إجابتك.
(ب) بفرض أن نفس البيانات في (3) تمثل عدد الزبائن الذين دخلوا مطعماً صغيراً في أحد أيام الأسبوع. كيف تفسّر العدد المتطرف في هذه الحالة؟

٧٨

(٣) (أ) 98 (ب) 67.7، 64، 59 (ج) 62.7، 61.5، 59
(د) استبعاد القيمة المتطرفة ينقص كلّاً من المتوسط الحسابي والوسيط
ولا يؤثر على المنوال.

(٤) (أ) إذا تأكدت من أن القيمة المتطرفة ناتجة عن خطأ في قراءتها أو تسجيلها، فاستبعدها.
(ب) استبق القيمة المتطرفة (ضعها في الاعتبار)، لأنه قد تكون هناك مناسبة أدت إلى دخول عدد كبير إلى المطعم.

Draft

حلول التمارين ص ٧٩ وصفحة ٨٠

(١) (أ) 90.2، 95، 95

(ب) 3.85، 3.8، 2.8

(ج) 441.4 422، لا يوجد

(د) 15.8، 15، لا يوجد

(٢) (أ) 50%

(ب) لا: تأمل المثال التالي: $2, 3, 3, y$

الوسيط = 3 وقيمته مساوية لإحدى قيم البيانات.

(ج) لا: 50% من البيانات ستقع دائماً عند الوسيط أو تحته ولكن ليس بالضرورة أن تقع إحداها عند الوسيط.

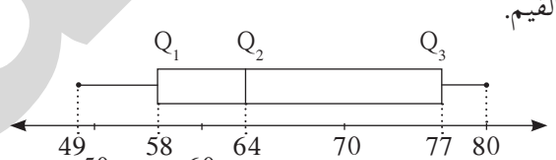
(٣) أعطِ هذا السؤال كواجب منزلي للطلاب، ثم ناقش معهم ما توصلوا إليه في الحصة التالية.

(٤) لاحظ أنه:

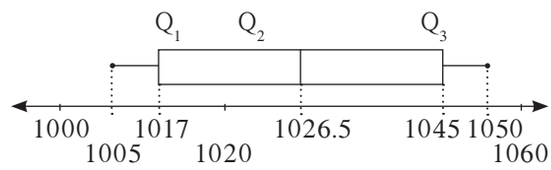
١– إذا كان عدد القيم فرديّاً، فإن Q_1 هو وسيط القيم أصغر من Q_2 بينما Q_3 هو وسيط القيم التي تزيد عن Q_2.

٢– إذا كان عدد القيم زوجيّاً، فإن Q_1 هو وسيط النصف الأدنى من القيم كلها و Q_3 هو وسيط النصف الأعلى من القيم.

(أ)



(ب)



اطلب إلى الطلاب تحديد الربيعات بدقة بعد حسابها.

(٥) (أ) 9.8، ترفع المتوسط الحسابي بمقدار 0.89

(ب) 5.5، تخفض المتوسط الحسابي بمقدار 1.125

(٦) المتوسط الحسابي هو 21.5، الوسيط هو 21.5

(٧) (أ) 14 (ب) 12.1، 12 (ج) 23

(د) القيمة المتطرفة ترفع المتوسط الحسابي والوسيط، فالمتوسط الحسابي والوسيط

على التوالي بدون القيمة المتطرفة هما: 10.9، 11.

(هـ) الزلازل القوية أكثر تكراراً في الفترة 1990 – 1994.

تمارين جهود ذاتية

١– أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من مجموعات البيانات الآتية:

(أ) 100، 95، 99، 55، 89، 92، 97، 95، 90

(ب) 2.4، 4.3، 5.5، 3.7، 3.9، 2.8، 5.4، 2.8

(ج) 475، 499، 402، 407، 405، 480، 422

(د) 14، 17، 20، 15، 13، 17، 14، 13، 20، 15

٢– بالنسبة للشكل الآتي الخاص بإحدى الشركات:

(أ) ما النسبة المئوية للعملاء التي تقع بالضبط أعلى من العمر الوسيط؟

(ب) هل من الضروري أن يقع أحد البيانات عند العمر الوسيط بالضبط؟ اشرح إجابتك.

(ج) هل يمكن أن تفعل الشركة شيئاً فيما يتعلق بالاكتشاف غير المتوقع؟ علل إجابتك.

٣– **نشاط مفتوح:** ابحث عن مجموعة من البيانات الواردة في إحدى الصحف. احسب الوسط والوسيط والمنوال لهذه المجموعة. قرر أيّاً من هذه المقاييس هو الأفضل في إعطاء صورة عامة من هذه البيانات، اشرح إجابتك.

٤– لكل من مجموعات البيانات الآتية، ارسم مخططاً للصندوق ذي العارضتين. استخدم لذلك الحاسبة، أو الورقة والقلم، أو الحساب العقلي:

(أ) 49، 58، 62، 64، 67، 77، 80

(ب) 1020، 1045، 1033، 1005، 1017، 1050

٥– تعرف على القيمة المتطرفة في كل من مجموعات البيانات الآتية، ثم اشرح كيف تؤثر قيمتها في الوسط بالنسبة للمجموعة.

(أ) 3.4، 4.5، 2.3، 5.9، 9.8، 3.3، 5.4، 2.1

(ب) 17، 21، 19، 10، 15، 19، 14، 5.5، 10.0

٦– **الطقس:** الجدول المبين يوضح درجات الحرارة المئوية لبعض المناطق السورية في 13 تشرين الثاني 2007.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط للمجموعة كلها.

(ب) أي المقاييس يمثل الدرجات المرتفعة؟

المنطقة	درجة الحرارة القصوى
دمشق	22
الجبلية	18
الجنوبية	23
الوسطى	21
الساحلية	24
الشرقية	22
الشمالية	21
الجزيرة	21

٧– **الجيولوجيا:** الجدول الآتي يبين عدد الزلازل القوية (7.0 رختر أو أكثر) التي حدثت في العالم في السنوات العشرة المبينة:

السنة	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
عدد الزلازل	14	6	11	8	7	13	11	23	14	14

المطلوب:

(أ) أوجد المنوال.

(ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لعدد الزلازل في السنة.

(ج) تعرف على العدد المتطرف في عدد الزلازل المبينة.

(د) وضح كيف يؤثر العدد المتطرف على المتوسط الحسابي والوسيط؟

(هـ) **الثقافة:** ارسم مخططاً للصندوق ذي العارضتين الممثل للبيانات السابقة موضحاً الوسيط 1989 – 1994 وليكن Q_1.

وإذا كان الوسيط في الفترة 1990 – 1994 وليكن Q_2 أقل من Q_1، فماذا تستنتج؟

Draft

الانحراف المعياري
Standard Deviation

كتاب الطالب من صفحة ٨١ إلى صفحة ٨٨

١. الأهداف:

– تعرف مفهوم الانحراف المعياري كمقياس للتشتت.

– إدراك أهمية الانحراف المعياري في تحليل نتائج البيانات الإحصائية وتفسيرها.

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

الانحراف المعياري–المدى بين الرُبَيع

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية

٤. التمهيد:

- وضح للطلاب أنه في هذا الجزء سيتعلمون مفهوماً إحصائيّاً جديداً هو الانحراف المعياري.
- اسأل الطلاب عن المصطلح (الكلمة) الذي يستخدم لوصف الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة من البيانات (المدى).
- اقترح على الطلاب إعداد جدول لتنظيم البيانات الإحصائية من اليسار إلى اليمين. اسألهم عن مدى تشتت البيانات ضمن المجال $[Q_1 - Q_3]$ ومن ثم ما دون Q_1 وما فوق Q_3. اطلب إليهم تحديد النسبة المئوية لكل تشتت.

٥. التدريس:

عمل تعاوني:

خطوات مقترحة لإيجاد الانحراف المعياري:

(أ) أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ للبيانات.

(ب) أوجد الفرق بين المتوسط الحسابي وكل من البيانات.

(ج) خذ مربع الفرق السابق واجمع المربعات التي حصلت عليها.

(د) أوجد الجذر التربيعي لقيمة وسط المربعات فتحصل على الانحراف المعياري.

مقال: استخدام البيانات الإحصائية للطاقة الكهربائية المستهلكة لحساب الانحراف المعياري.

يمكن للطلاب استخدام القاعدة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

حيث n هو عدد القيم.

ويمكن إدخال البيانات الإحصائية إلى الآلة الحاسبة العلمية

الانحراف المعياري — Standard Deviation

عمل تعاوني

ألق نظرة على مجموعات البيانات الأربع الموجودة في الجدول الآتي:

S_1	77	78	79	80	80	81	82	83
S_2	20	60	70	80	80	90	100	140
S_3	50	60	70	80	80	90	100	110
S_4	20	30	40	80	80	120	130	140

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مجموعة.

(ب) هل كل المجموعات متشابهة؟

(لاحظ مدى اقتراب وابتعاد البيانات بالنسبة للمتوسط الحسابي والوسيط)

(ج) أوجد الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في كل مجموعة.

ماذا تقول لك هذه الفروق عن المجموعات المعطاة؟

(لاحظ تشتت البيانات في كل مجموعة.)

(د) احسب الربيعات لكل مجموعة.

نصف البيانات في كل مجموعة يقع بين Q_1 و Q_3

القيمة $(Q_3 - Q_1)$ تعطي فكرة عن مدى تشتت dispersion البيانات في المجموعة.

أوجد $(Q_3 - Q_1)$ لكل مجموعة. قارن بين هذه القيم.

(هـ) لخص أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المجموعات الأربع من حيث النزعة المركزية، ومن حيث تشتت البيانات في كل مجموعة. أي المجموعات أكثرها تشتتاً وأيها أقلها تشتتاً؟ اشرح إجابتك.

(و) ارسم مخططاً للصندوق ذي العارضتين لكل من المجموعات الأربع. هل الشكل يدعم إجابتك في (هـ)؟

سوف تتعلم
* مفهوم الانحراف المعياري
* أهمية الانحراف المعياري في الإحصاء
* استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد الوسط والانحراف المعياري

دعنا نفكر ونتناقش

يستخدم الإحصائيون (العاملون في مجال الإحصاء) مقاييس عديدة للتغير لوصف مدى انتشار (تشتت) مفردات مجموعة من البيانات.

مقاييس التغير

المقياس	التعريف
١) المدى RANGE	أكبر قيمة – أصغر قيمة
٢) المدى بين الرُبيعين interquartile range	$(Q_3 - Q_1)$
٣) الانحراف المعياري standard deviation	قياس كيفية تغير كل قيمة في مجموعة البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه المجموعة

٨١

أسئلة للتفكير

١– هل يمكن أن يكون التغير أو التشتت في مجموعتين من البيانات مختلفاً على الرغم من اتفاقهما في نفس المدى؟

٢– هل يمكن أن يكون التغير (التشتت) في مجموعتين من البيانات مختلفاً على الرغم من اتفاقهما في نفس المدى بين الربيعات؟

التعبير عن الانحراف المعياري

يستخدم الرمز σ (يقرأ سيجما) للتعبير عن الانحراف المعياري.

حساب الانحراف المعياري

لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات نتبع الخطوات الآتية:

١– أوجد المتوسط الحسابي $(\bar{x})$.

٢– أوجد الفرق بين كل مفردة والوسط.

٣– ربع الفرق (الذي حصلت عليه في (٢)، بالنسبة لكل مفردة والوسط).

٤– احسب وسط كل مربعات الفروق.

٥– أوجد الجذر التربيعي للوسط الذي حصلت عليه في (٤)، فيكون هو الانحراف المعياري.

مثال (١) تطبيقات حياتية

الجدول الآتي يبيّن الطاقة الكهربائية (يقاس بالميجاواط في الساعة) والتي استخدمت في خمسة أيام في أحد المواقع.

اليوم	1	2	3	4	5
الطاقة المستخدمة	48.0	53.2	52.3	46.6	49.9

المطلوب: إيجاد الانحراف المعياري في استخدام الطاقة خلال الأيام المبينة في الجدول.

الحل

١– $\bar{x} = \frac{49.9 + 46.6 + 52.3 + 53.2 + 48.0}{5} = 50.0$

٢–

x	$\bar{x}$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
48.0	50	−2.0	4.00
53.2	50	3.20	10.24
52.3	50	2.3	5.29
46.6	50	−3.4	11.56
49.9	50	−0.1	0.01
مجموع مربعات الفروق			31.10

٣– متوسط مربعات الفروق =

$\frac{31.10}{5} = 6.22$

$\sigma = \sqrt{6.22}$

٨٢

Draft

فتحصل على المتوسط الحسابي ($\overline{x}$) والانحراف (σ).

أفكار مساعدة: شجع الطلاب على رسم صندوق الرُبَيعات. أسألهم في كل تمرين عن تفسيرهم للنتائج. اطلب إليهم العمل ضمن مجموعات من اثنين. تقوم المجموعة الأولى بإيجاد الانحراف المعياري بالحساب العادي والثانية بواسطة الآلة الحاسبة ثم اسألهم مقارنة النتائج.(في حال العينيات الصغيرة يكون $T = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$

٦. الربط:

يعمل الطلاب ضمن مجموعات على مثال (١) ص ٨٢.

٧. أخطاء متوقعة:

يقع الطلاب في الكثير من الأخطاء في احتساب مربّع الفرق بين كل مفردة والمتوسط الحسابي ثم في احتساب الجذر التربيعي، ذكرهم بوجوب الاستفادة من الآلة الحاسبة.

٨. التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمرين رقم ٦ أو التمرين رقم ٧ ص ٨٦ من كتاب الطالب.

٩. مسألة اليوم:

(أ) اكتب دالة من الدرجة الأولى للتكلفة الإجمالية التي ستدفعها لقاء اشتراكك ببرامج تلفازية إذا كانت الدفعة الأولى 500 ليرة وكل دفعة بعدها تساوي 300 ليرة شهرياً.

(ب) إذا دفعت مبلغاً وقدره 3 500 ليرة فما عدد أشهر الاشتراك؟

[(أ) $f(x) = 300x + 500$

(ب) 10 أشهر.]

١٠. إجابات وحلول:

العمل التعاوني ص ٨١

(أ) $S_1, S_2, S_3, S_4 : 80, 80, 80, 80$

(ب) المجموعات مختلفة في اقترابها وتجمعها حول 80

(ج) الفروق على الترتيب: 6، 120، 60، 120

(د) S_1S_3 أقل انتشاراً (تغيراً) عما هو الحال في S_2S_4

	Q_1	Q_2	Q_3	$Q_3 - Q_1$
S_1	78.5	80	81.5	3
S_2	65	80	95	30
S_3	65	80	95	30
S_4	35	80	125	90

($Q_3 - Q_1$) تبين أن S_4 هي الأوسع انتشاراً داخل النصف الوسيط (بين Q_1، Q_3) للبيانات، وأن S_3 هي أقل انتشاراً من S_4.

الانحراف المعياري ≈ 2.5 مجاواط ساعة

تمارين

١– أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات:
50، 60، 70، 80، 80، 90، 100، 110

٢– **تفكير ناقد:** فكر في مجموعات البيانات الآتية:
م١: 77، 78، 79، 80، 80، 81، 82، 83
م٢: 20، 60، 70، 80، 80، 90، 100، 140
م٣: 20، 30، 40، 80، 80، 120، 130، 140

فكر في الانحرافات المعيارية الآتية لهذه المجموعات 43.9، 32.0، 1.9

المطلوب: اقرن كل مجموعة من البيانات بانحرافها المعياري.

* تستخدم شركات الكهرباء الانحراف المعياري للإعداد لأيام الذروة، أي التي يكون فيها الطلب على أشده.

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للطلب اليومي على الطاقة الكهربائية في إحدى المدن خلال شهر آب بحسب الجدول الآتي:

الطلب اليومي للطاقة الكهربائية

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
			53	52	47	50
39	33	40	41	44	47	49
43	39	47	49	54	53	46
36	33	45	45	42	43	49
33	33	40	40	41	42	

يمكنك استخدام الآلة الحاسبة

$\overline{x}$ = المتوسط الحسابي ≈ 43.2 $\sigma = 6.0$

والشكل الآتي يبيّن كيف تمثل شركة الكهرباء البيانات المبينة:

– ارسم خط الأعداد مبيّناً عليه $\overline{x}$.

– ضع علامات لمجالات طول كل منها 6 على جانبي نقطة الوسط $\overline{x}$.

لاحظ الآتي:

$\overline{x} = 43.2$، $\sigma = 6.0$

$\overline{x} - \sigma = 43.2 - 6 = 37.2$، تقريباً (انحراف معياري واحد تحت المتوسط الحسابي)

$\overline{x} + \sigma = 43.2 + 6 = 49.2$ (انحراف معياري واحد فوق المتوسط الحسابي)

* يوضح الشكل أن الشركة يمكنها أن تتوقع أن الطلب اليومي على القوة الكهربائية في معظم الأيام يقع بين انحرافين معياريين (أي بين $\overline{x} - \sigma$، $\overline{x} + \sigma$).

مثال (٣) تطبيقات حياتية

١– الطاقة (من المثال السابق)

باستخدام $\overline{x} = 43.2$، $\sigma = 6.0$، أين تقع الطلبات على الطاقة الآتية؟

(أ) 38.5 مجاواط ساعة (ب) 53.0 مجاواط ساعة

الحل

(أ) حيث إن $\overline{x} - \sigma = 37.2$

38.5 تقع تحت المتوسط الحسابي بانحراف معياري واحد

(ب) حيث إن $\overline{x} + 2\sigma = 55.2$

53 تقع فوق المتوسط الحسابي بانحرافين معياريين حيث $53 < 55.2$ ، $49.2 <$

تفكير تحليلي: في شهر أيار من نفس السنة كان متوسط الطلب اليومي على الطاقة في مدينة ثانية 35.8 بانحراف معياري 3.5 مجاواط ساعة. تضع شركة الكهرباء في اعتبارها إمكانية زيادة الطلب في مدى (٣) انحرافات معيارية من المتوسط فتستعد لذلك.

* هل الشركة مستعدة لطلب طاقة قدرها 48 مجاواط ساعة؟ اشرح إجابتك.

على ذلك فالطاقة 48 مجاواط ساعة فوق ثلاثة انحرافات معيارية أعلى من المتوسط الحسابي.

Draft

ولكنها تساوي S_2 وأن S_1 أقلها جميعاً في الانتشار.

(هـ) على الرغم من أن للمجموعات الأربع مقاييس النزعة المركزية نفسها إلا أنها تختلف في الانتشار.

لاحظ الاختلاف بين المجموعتين S_1، S_4.

اطلب إلى الطلاب رسم الصناديق المطلوبة.

دعنا نفكر ونتناقش ص ٨١

- وضح أن المدى هو أبسط مقياس للتشتت أو الانتشار في مجموعة من البيانات.
- اسأل: هل من الممكن لمجموعتين من البيانات أن تختلفا في المدى رغم أن لهما المتوسط الحسابي نفسه؟ (نعم)
- اطلب منهم إعطاء أمثلة من عندهم.
- اسأل الطلاب: ما الذي لا يمكن للمدى أن يصفه؟

لا يستطيع المدى أن يصف بالضبط مدى اقتراب أو بعد كل مفردة في البيانات – يعطي ذلك دافعاً للبحث عن مقياس أفضل وينقلهم إلى الانحراف المعياري.

أسئلة للتفكير ص ٨٢

(١) نعم: مثلاً S_2، S_4، في الجدول السابق.

(٢) نعم : مثلاً S_2، S_3

حلول التمارين ص ٨٣

(١) 20

(٢) $م_1$: 1.9، $م_2$: 32.0، $م_3$: 43.9

تفكير تحليلي ص ٨٤

لا: ليست مستعدة، $3(3.5) + 35.8 = 46.3$

وحيث إن $46.3 < 48$ فإن الطاقة المطلوبة (48) أكبر من 3 انحرافات معيارية فوق المتوسط.

تمارين ص ٨٥، ٨٦

(١) (أ) 2.5, 5, 5.7 $(7 - 4.5 = 2.5)$

(ب) 57, 105, 67.29

(ج) 288, 486, 1648

(٢) (أ) 228.33

(ب) 5.98

(ج) 165.5

(٣) (أ) 16.33 ، 72.69

سرعات الطيور أكثر تشتتاً بالنسبة إلى سرعات الحيوانات.

(ب) 1.14, 3.5

عدد الأزرار هو الأكثر تشتتاً / انتشاراً.

تمارين

١– أوجد المتوسط الحسابي والمدى، بيّن الرُبيع لكل من مجموعات البيانات الآتية:

(أ) 8، 7، 7، 6، 6، 5، 5، 4، 3

(ب) 20، 34، 56، 67، 78، 91، 125

(ج) 1724، 1786، 1670، 1760، 1300

٢– أوجد الانحراف المعياري لكل من:

(أ) 78، 90، 456، 673، 111، 381، 21

(ب) 1، 0، 17، 12، 15، 9، 11، 15

(ج) 350، 480، 610، 230، 720، 590

٣– أوجد الانحراف المعياري لكل مجموعة، واستخدمه في المقارنة بين المجموعات المعطاة:

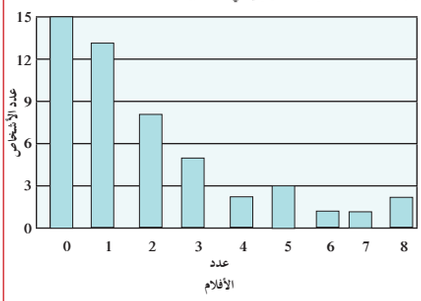
(أ) أكبر السرعات المسجلة لقطط مختلفة 30، 70، 50 ميل/ساعة.
أكبر السرعات المسجلة لطيور مختلفة 217، 55، 200 ميل/ساعة.

(ب) عدد الأزرار على بعض الملابس 11، 5، 12، 8، 3، 12
عدد الجيوب في نفس الملابس 5، 5، 5، 2، 2، 5

٤– **إحصاءات:** الشكل المبين يوضح بالأعمدة عدد الأفلام التي شاهدها 50 شخصاً في فصل الصيف.

(أ) أوجد متوسط عدد الأفلام التي شاهدها الخمسون شخصاً.
إرشاد: أوجد من الشكل عدد الأفلام التي شاهدها كل شخص.

(ب) احسب الانحراف المعياري في هذه البيانات.



٥– (أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستخدام الطاقة اليومي خلال الأيام العشرة المبينة.

51.8	53.6	54.7	51.9	49.3
52.0	53.5	51.2	60.7	59.3

(ب) كم مفردة في مجموعة البيانات في (أ) التي تقع في الفترة ما بين المتوسط الحسابي وانحراف معياري واحد؟ وفي الفترة الواقعة بين المتوسط الحسابي وانحرافين معياريين،... ثلاثة انحرافات معيارية؟

٦– **أجور عمال:** الجدول المبيّن يوضح الوسيط للأجور الأسبوعية بالليرة السورية للعاملين في وظائف مختلفة في مؤسستين للنقل: الاتحاد، المساهمة.

الوظيفة	الاتحاد	المساهمة
إدارة	768	628
قيادة	672	458
ميكانيكا	518	407
صيانة	514	327
خدمات	483	268
أعمال كتابية	416	273

المطلوب

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والمدى للأجور في كلتا المؤسستين.

(ب) احسب الانحراف المعياري في كلتا الحالتين.

(ج) في أي فترة بين المتوسط الحسابي والانحرافات المعيارية يقع الأجر الأسبوعي 600 ليرة سورية في كلتا المؤسستين؟

(د) قارن القيم التي حصلت عليها في (أ)، (ب) لكلتا المؤسستين.

تفكير تحليلي:

حلل معنى أي فروق تجدها، وناقش نتائجك.

٧– **الدخل السنوي:** الجدول الآتي يبيّن الدخل السنوي بملايين الليرات السورية من المحاصيل الزراعية في سبع مناطق في عامي 2000 و2001.

المنطقة	2000	2001
1	10409	10001
2	7170	7363
3	7023	6573
4	4174	4053
5	2984	2933
6	8783	8909
7	3157	3320

(أ) احسب متوسط الدخل من المحاصيل الزراعية في العامين المذكورين.

(ب) **تعبير:** استخدم المدى لوصف التغير في الدخل من عام 2000، إلى عام 2001 في المناطق المبينة.

(ج) احسب الانحراف المعياري في كل عام. في أي العامين كان الدخل يتجمع أكثر حول المتوسط الحسابي؟

Draft

(٤) (أ) 1.92

(ب) 2.12

د ع الطلاب ينشئون جدولاً يتبين فيه: عدد الأفلام لكل مشاهد، عدد المشاهدين (50)، جملة الأفلام المشاهدة (96).

(٥) (أ) 3.4, 53.8

(ب) 10, 9, 7

(٦) (أ) 360, 393.50, 352, 561.83

(ب) 125.18, 119.95

(ج) 1, 1

(د) د ع الطلاب يلاحظون أنه لا توجد بيانات تفصيلية عن كل وظيفة على حدة، مما يجعل من الصعب إعطاء تحليلات مفصلة.

(٧) (أ) 6165, 6243

(ب) 7068, 7425

(ج) 2587, 2664.59، عام 2001

(٨) مثلاً: 51, 50, 49 ؛ $\sigma = 0.82, \overline{x} = 50$

40، 50، 60؛ $\sigma = 8.16, \overline{x} = 50$

مشروع في الصف

يفضل أن يكون ذلك تعاونيّاً إذ إن كل مجموعة صغيرة تقترح مشروعاً ثم تعرض المجموعات عملها في اجتماع عام لكل الصف.

تجري مناقشة ذلك في اجتماع عام في إطار تفاعل بين الطلاب. مثلاً المحافظة على البيئة:

- الرش بالمبيدات
- تنظيف الطرقات
- الملصقات التي تدعو إلى النظافة
- إعادة تدوير النفايات
- تنظيف الحدائق العامة
- الاعتناء بالأشجار والأزهار

٨– تفكير ابتكاري

أعط مثالاً لمجموعتين من البيانات لهما نفس المتوسط الحسابي، ولكن يختلفان في الانحراف المعياري بخمس نقاط على الأقل، مبيناً الوسيط والانحراف المعياري لكل مجموعة.

مشروع

افترض أنك ترغب في إقامة مشروع يهم سكان المنطقة التي تعيش فيها، ما المشكلات التي تبدو الأكثر أهمية لسكان هذه المنطقة؟ ابتكر مشروعاً لإنتاج سلعة أو تقديم خدمة تساهم في حل هذه المشكلة. تأكد أن فكرتك تكون عملية. ارسم مخططاً أو نموذجاً بمقياس رسم للمشروع، أو اكتب وصفاً لهذا المشروع متضمناً التكلفة التي تراها مناسبة.

تقييم ذاتي

قارن بين الصندوق ذي العارضتين والانحراف المعياري. ما المعلومات التي يقدمها كل من الأسلوبين بالنسبة لتغير الحادث في مجموعة من البيانات؟

٨٧

استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري

Using a Calculator to Find the Mean and the Standard Deviation

مثال

أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، لمجموعة البيانات الآتية: 50, 60, 70, 80, 80, 90, 100, 110

خطوات العمل

١– اضبط وضع التشغيل على الوضع "SD" بالضغط على المفتاحين بالتتابع من جهة اليسار.

٢– نضغط على المفاتيح بالتتابع من جهة اليسار
50 EXE, 60 EXE, ...

٣– لإيجاد المتوسط الحسابي $\overline{x}$، اضغط على SHIFT $\overline{x}$ بالتتابع من اليسار إلى اليمين نحصل على المتوسط الحسابي = 80.

٤– لإيجاد الانحراف المعياري σ اضغط على SHIFT N
نحصل على $\sigma = 18.70828693$

تدريب

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيم كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري في التمارين السابقة.

٨٨

Draft

العينات Samples

كتاب الطالب من صفحة ٨٩ إلى صفحة ٩٦

١. الأهداف:

- تعرف المفاهيم
- المجتمع Population
- العينة من المجتمع Sample، وتناسب العينة، والعينة العشوائية، والعينة المتحيزة، والعينة غير المتحيزة

٢. المفردات والمفاهيم الجديدة:

العينة – تناسب العينة – العينة العشوائية – العينة غير المتحيزة – هامش الخطأ

٣. الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة

٤. التمهيد:

اسأل الطلاب إذا كان بإمكانهم تعرف آراء كافة سكان الجمهورية العربية السورية من خلال السؤال التالي:

«أي فريق كرة قدم تفضل؟»

تناقش معهم حول إجاباتهم المحتملة.

٥. التدريس:

– وضح للطلاب ما المقصود بالعينة (sample)، معنى إجراء دراسة أو تجربة باستخدام «عينة» من الشيء أو المجتمع (population) الذي تدرسه.

– اشرح لهم أنه عندما تكون هناك صعوبة، أو استحالة لدراسة موقف معين، فإن الباحثين ينشئون «نموذجاً» (model) للموقف ويجرون التجارب على هذا النموذج، ويسمى العمل على النموذج المحاكاة (simulation). بعض التجارب في الكيمياء تجرى على الحاسوب كمحاكاة لإجرائها في المعمل. هناك تدريبات على قيادة السيارة تتم بالمحاكاة على الحاسوب. عند عمل اختبار لقيادة السيارة، يتم الاختبار في إحدى المناطق (أو الشوارع) المخصصة لذلك كعينة للقيادة في كل الشوارع.

– في الامتحانات توضع الأسئلة كعينة تمثل المقرر كله.

– اطلب من الطلاب أن يستخدموا كلمة «عينة» في أمثلة من عندهم. مثلاً، قبل شراء نوع معين من «الجبنة» تذوقت قطعة صغيرة منها كعينة.

مقدمة

تستند معلوماتنا واتجاهنا وأفعالنا – بدرجة كبيرة – إلى عينات من الأشياء أو المواقف التي ندرسها أو نتحدث عنها؛ فعندما يقيس الطبيب – مثلاً – نسبة السكر في الدم، فإنه يأخذ عينة صغيرة من الدم، كذلك فإنك عندما تريد أن تعرف مدى مناسبة حلاوة عصير الليمون أو كوب الشاي فإنك تتذوق عينة صغيرة منه. إن الكثير من الدراسات العلمية والأبحاث في المعامل، واستطلاعات الرأي العام وتركيبات السكان، تعتمد على دراسة عينة من المجتمع الكلي لما نريد دراسته أو التعرف عليه، وذلك لصعوبة وتكلفة دراسة شعب بكامله أو بئر بترول بكاملها، أو أي مجتمع بكامله سواء أكان مجتمعاً بشرياً أم مادياً.

وفي هذه الوحدة سنتعرف – ببساطة – مفهوم "العينة"، وسوف نستخدم المصطلحات الآتية:

المجتمع Population

ويقصد به "الكل" الذي نبتغي دراسته مثل كل سكان سورية في تاريخ معين أو كل العصير الذي يحتويه وعاء معين أو كل الدم في جسم شخص معين.

العينة Sample

ويقصد بها جزء يتم اختياره من مجتمع معين، لإجراء دراسة على هذا المجتمع من خلال هذا الجزء، بفرض أن خواص المجتمع سوف تتضح في العينة المأخوذة منه.

تناسب العينة Sample proportion

عند دراسة خاصية معينة في عينة ما، فإن نسبة المفردات التي تتوفر فيها هذه الخاصية إلى العدد الكلي لأفراد العينة تسمى تناسب العينة.

فمثلاً، إذا اخترت عينة من طلاب الصف الأول في مدرستك، وكان عددها 75 طالباً، وكان عدد الطلاب ذوي البشرة السمراء في هذه العينة 51 طالباً، فإن

تناسب العينة : $\frac{51}{75} = 0.68$

$= 68\%$

وبصفة عامة

إذا كان عدد أفراد عينة ما (n) وكان أحد الأحداث/الخواص بها يقع (x) من المرات فإن:

تناسب العينة $= \frac{x}{n}$

سوف تتعلم

* تحديد ماهية المجتمع
* مفهوم العينة من المجتمع (العينة العشوائية)
* تحديد تناسب العينة
* هامش الخطأ
* تناسب المجتمع

العينة العشوائية Random sample

عند اختيار عينة من مجتمع معين لدراسة خواصه، فإنه ينبغي أن يتم الاختيار بطريقة تضمن أن يكون لكل فرد من أفراد المجتمع الفرصة نفسها في أن يكون من بين مفردات هذه العينة؛ وذلك حتى لا تكون العينة متحيزة، فلا يتضح فيها ولا يتمثل فيها كل الخواص التي تتم دراستها أو البحث عنها في المجتمع. وعند توفر ذلك في الطريقة التي تختار بها العينة، فإنها تسمى عينة عشوائية؛ أي أن: **العينة العشوائية** هي العينة التي يكون لكل فرد في المجتمع الذي تختارها منه الفرصة نفسها في اختياره في العينة.

فمثلاً، في حالة دراسة تناسب عينة الطلاب ذوي البشرة السمراء في طلاب الصف الأول بمدرستك، إذا أُخذت العينة من صف معين وليكن أولى أول (1 – أ)، فإن العينة هنا قد تكون **متحيزة** biased، حيث إن النسبة التي حصلت عليها قد تكون متوفرة فقط في هذا الصف (1 – أ)، لأننا اخترناها فقط من صف معين دون اعتبار لبقية صفوف الصف الأول.

العينات غير المتحيزة Samples without bias

عند دراسة خصائص مجتمع معين، ينبغي أن تكون العينات التي يتم اختيارها غير متحيزة، أي أنها لا تكون مقصودة أو من مكان بعينه أو من مجموعة معينة من البشر، بل تكون ممثلة للمجتمع كله، فمثلاً تكون ممثلة للذكور والإناث، للمتعلمين وغير المتعلمين، وللطبقات المختلفة في المجتمع... إلخ. هناك طرق كثيرة تستخدم لاختيار عينات غير متحيزة، مثل العينة العشوائية والعينة الطبقية (الممثلة للطبقات المختلفة والنوعيات المختلفة التي يتكون منها المجتمع)، وذلك لتجنب الحصول على نتائج غير ممثلة حقيقة للمجتمع الذي يتم دراسته. كما أن هناك طرقاً رياضية للتعرف على نسب الخطأ الذي يمكن أن يقع عند اختيار عينة معينة حتى لو كانت عشوائية.

من ناحية أخرى، فإنه إذا كانت العينة التي يتم اختيارها تتضمن تمثيلاً أزيد أو أقل من حقيقة المجتمع، فإنها تعتبر عينة متحيزة.

دعنا نفكر ونتناقش

١– في عينة مكونة من 350 طالباً وجد أن 294 منهم لم يدرسوا اللغة الفرنسية. أوجد تناسب العينة لأولئك الذين لم يدرسوا اللغة الفرنسية. عبر عن إجابتك بكسر عشري ثم بنسبة مئوية.

٢– **تفكير ناقد:** تناسب العينة يعطي تقديراً للنسبة المئوية من المجتمع الكلي الذي تتوفر فيه خاصية معينة. هل تناسب العينة يعتبر "احتمالاً" تجريبياً (أي تم التعرف عليه بالتجربة) أم أنه احتمال نظري؟

٣– في تجربة التعرف على تناسب عينة الطلاب ذوي البشرة السمراء في طلاب الصف الأول بمدرستك، هل تعتبر هذه العينة ممثلة لكل طلاب المدرسة أم لكل طلاب سورية؟

Draft

– سوف يستخدم الطلاب في هذا الجزء مصطلحات جديدة، لذا يطلب شرحها وتوضيحها لهم بأمثلة.

– كلمة تناسب (proportion) في هذا الجزء تستخدم بمعنى نسبة؛ لأن الطالب يدرس التناسب ويتعامل معه كتساوي نسبتين أو أكثر، ولكنه في «تناسب» العينة يتعامل معه كنسبة (مقارنة بين عددين عن طريق القسمة). كلمة «عشوائي» (random) هنا تختلف عن المعنى اللفظي الشائع. في اللغة العامية التصرف العشوائي يعني ضمناً تصرفاً (اعتباطيّاً) بدون تفكير ويخضع للمصادفة البحتة، ولكن الاختبار العشوائي هنا في الإحصاء أو عند دراسة الاحتمالات له معنًى محدد، بمعنى أن كل فرد في المجتمع (الذي تجري الدراسة عليه) تكون له فرصة الاختيار نفسها في العينة. وهناك طرق لاختيار العينات العشوائية حتى لا يكون الاختيار «متحيزاً» لأفراد معينين، أو لنوع معين من الأنواع الموجودة في المجتمع.

– اشرح للطلاب في الموقع المناسب معنى كلمة احتمال (probability) التي تقابل ببساطة كلمة إمكانية أن يحدث (likely)، وأن احتمال حدوث حدث ما هو عدد يتراوح بين الصفر (عندما تتأكد استحالة حدوثه) وبين الواحد (عندما يكون من المؤكد أن يحدث)، وأنه في غالبية الحالات كسر يقع بين الصفر والواحد، ويعبر عنه بصورة كسر أو كسر عشري أو نسبة مئوية.

٦. الربط:

يناقش الطلاب مثال (تطبيقات حياتية من الصفحة ٩٤).

٧. أخطاء متوقعة:

(أ) بعض الطلاب قد يجد صعوبة في فهم العينة المتحيزة بسبب قلة معرفته بأفكار وعادات العينة موضوع الإحصاء. مدّ يد المساعدة شارحاً لهم بإسهاب العينات الثلاث:

عينة اختيار ذاتي (مثلاً بالاتصال الهاتفي).

العينة المتحيزة (مثلاً تختار مكاناً معيناً مريحاً وملائماً لما تريد).

العينة العشوائية (وهي غير متحيزة).

(ب) قد يستخدم بعض الطلاب العدد الخاطئ في حساب هامش الخطأ: وضح لهم استخدام العدد الصحيح وهو عدد الأشخاص في العينة. ساعدهم أيضاً على إيجاد التناسب الحقيقي للمجتمع وهو تناسب العينة ± هامش الخطأ.

٨. التقويم:

اطلب من الطلاب حل التمارين من الصفحتين ٩٥ و ٩٦ في كتاب الطالب.

مثال تطبيقات حياتية

أراد مقدمو أحد البرامج التلفزيونية أن يتعرفوا النسبة المئوية للمجتمع الواقع في محيط المنطقة التي يتم فيها مشاهدة هذا البرنامج فيما يتعلق بالذين يفضلون سلعة معينة. حدّد ما إذا كان هناك تحيز في الطرق الآتية لاختيار عينة يتم التعرف منها على هذه النسبة.

(أ) يتم دعوة مجموعة من المشاهدين للاتصال الهاتفي والتعبير عما يفضلونه.

(ب) ينزل أحد مقدمي البرنامج إلى الشارع ويجري مقابلات شخصية مع مجموعة الناس الواقفين بجوار أحد توكيلات هذه السلعة.

(ج) أثناء تقديم البرنامج، يتم اختيار 300 شخص بطريقة عشوائية من محيط المنطقة التي يتم فيها مشاهدة البرنامج، ثم يتم الاتصال بكل منهم.

الحل:

(أ) العينة التي تجري اتصالاً هاتفياً قد تكون من أكثر الناس أو أقل الناس الذين يفضلون هذه السلعة. العينة في هذه الحالة يطلق عليها عينة اختيار ذاتي **self–selected sample**، فقد يطلب من يفضلون هذه السلعة أناساً آخرين يعرفون أنهم يفضلون السلعة مثلهم ويطلبون منهم الاتصال الهاتفي.

(ب) هذه العينة يطلق عليها عينة مريحة/ملائمة **convenient sample**، ذلك أن الشخص الذي يجري المقابلات الشخصية يكون موجوداً في مكان واحد أكثر ملاءمة وراحة له، ولكون مكان اختيار العينة بجوار أحد توكيلات السلعة، فإن الأفراد المختارين يمثلون نسبة الأفضلية أكثر من الواقع، وبالتالي تكون العينة متحيزة.

(ج) هذه الطريقة في اختيار العينة هي الأقل تحيزاً، فالعينة في هذه الحالة تعتبر عينة عشوائية.

حجم العينة Sample size

حجم العينة يقصد به عدد المفردات التي تكون العينة.

ما أثر حجم العينة على مدى تمثيلها للمجتمع المأخوذة منه؟

على سبيل المثال: إذا سألنا عينات من الطلاب من أحجام مختلفة عن الكتاب الذي ألفه طه حسين من بين عدة اختيارات:

(أ) عودة الروح (ب) عبقرية عمر

(ج) الأيام (د) من هنا نبدأ

نجد في بعض العينات أن لا أحد يعرف الإجابة الصحيحة، وهي كتاب "الأيام". وفي عينات أخرى، كل الأفراد يعرفون الإجابة الصحيحة.

في العينات الأكبر حجماً، هناك احتمال ضعيف أن نجد عينة جميع أفرادها يعرفون الإجابة الصحيحة، كما نجد عينة أخرى بعض أفرادها لا يعرفون الإجابة الصحيحة.

٩١

تدريب

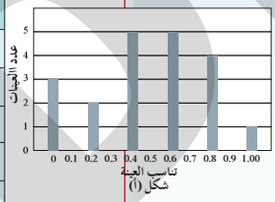
عند دراسة توزيع تناسب عينات ذات أحجام مختلفة، أجريت تجربة ثلاث مرات، اختير في كل مرة 20 عينة أحجام كل منها كالآتي:

(أ) 5 أفراد (ب) 10 أفراد (ج) 20 فرداً

وكانت النتائج كالآتي:

(أ) في حالة العينات التي حجم كل منها 5 أفراد.

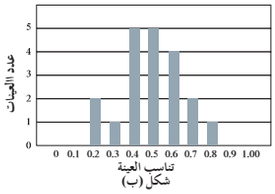
تناسب العينة (نسبة الإجابات الصحيحة في العينة)	عدد العينات
$\frac{0}{5} = 0.00$	3
$\frac{1}{5} = 0.2$	2
$\frac{2}{5} = 0.4$	5
$\frac{3}{5} = 0.6$	5
$\frac{4}{5} = 0.8$	4
$\frac{5}{5} = 1.00$	1
مجموع العينات	20 عينة



شكل (أ)

(ب) في حالة العينات التي حجم كل منها 10 أفراد.

تناسب العينة (نسبة الإجابات الصحيحة في العينة)	عدد العينات
$\frac{2}{10} = 0.2$	2
$\frac{3}{10} = 0.3$	1
$\frac{4}{10} = 0.4$	5
$\frac{5}{10} = 0.5$	5
$\frac{6}{10} = 0.6$	4
$\frac{7}{10} = 0.7$	2
$\frac{8}{10} = 0.8$	1
المجموع الكلي	20 عينة



شكل (ب)

٩٢

Draft

٩. مسألة اليوم:

إن ناتج ضرب عدد .... $a = 0.333$ وعدد .... $b = 0.666$ هو عدد .... $c = 0.xxx$. أوجد قيمة x.

$[x = 2]$

١٠. إجابات وحلول:

دعنا نفكر ونتناقش ص ٩٠

(١) 0.84 أو 84%

(٢) تفكير ناقد : الاحتمال هنا تجريبي؛ لأنه تم حسابه نتيجة تجربة معينة حدثت.

الاحتمال النظري يكون حسابه ناتجاً عن معرفة كل ما يمكن حدوثه في تجربة ما من دون إجراء هذه التجربة، مثلاً: عند إلقاء قطعة نقود معدنية، فإن احتمال ظهور صورة $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ هو احتمال نظري؛ لأننا نعلم مسبقاً أنه عند إلقاء قطعة النقود كل ما يمكن حدوثه هو صورة أو كتابة ولا شيء غير ذلك.

ومثلاً : في حالة الولادة ، إن احتمال أن يكون المولود صبيّاً هو $\frac{1}{2}$ ، واحتمال أن يكون بنتاً هو $\frac{1}{2}$ ، واحتمال أن يكون (صبيّاً أو بنتاً) هو 1، واحتمال أن يكون قطّاً هو صفر.

(٣) لا يمكن تعميم هذه الخاصية إلا على طلاب الصف الأول فقط (لا على طلاب المدرسة كلها، ولا على طلاب سورية كلهم).

حل التدريب ص ٩٢

اعرض الجداول، واطلب إلى الطلاب تمثيلها بيانيّاً.

(أ) المدى : 1، 0.6 ، 0.55 في أ، ب ، ج على الترتيب.

(ب) توزيع العينات التي حجم كل منها 20 فرداً هو الأقل في الانحراف المعياري، لأنه من الشكل يتضح اقتراب البيانات من الوسط وعدم اتساع انتشارها فيما بينها.

حل التدريب ص ٩٣

يضرب هامش الخطأ بـ $\frac{1}{\sqrt{2}}$؛ هامش الخطأ:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{100}} = \pm\frac{1}{10}$$
$$= \pm 10\%$$

حل التدريب ص ٩٤

(١) تناسب العينة: $\frac{216}{400} = 0.54 = 54\%$

هامش الخطأ: $\pm\frac{1}{\sqrt{400}} = \pm\frac{1}{20} = \pm 5\%$

فترة هامش المجتمع:

$$[(54-5)\%, (54+5)\%] = [49\%, 59\%]$$

(٢) 52%, ± 3%، من 49% إلى 55%

حلول التمارين ص ٩٤، ٩٥

(١) (أ) 72.8% (ب) 45% (ج) 91.7%

(٢) (أ) ±7.1% (ب) ±5% (ح) ±3.5%

(د) ±3.2% (هـ) ±2.9%

(ج) في حالة العينات التي حجم كل منها 20 فرداً.

تفكير ذكي: ما تأثير مضاعفة حجم العينة على هامش الخطأ؟

بالنسبة للأشكال السابقة لتناسبات العينات مختلفة الأحجام (أ، ب، ج) أجب عن الآتي:

(أ) ما مدى توزيع تناسب العينة في كل منها؟

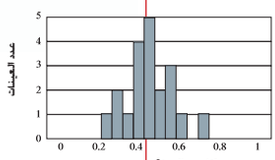
(ب) **تفكير ناقد:** من دون إجراء عمليات حسابية، أي من التوزيعات السابقة يبدو انحرافه المعياري هو الأقل؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة هامة:

ينبغي أن يسجل تناسب العينة مصحوباً بتقدير لخطأ يطلق عليه هامش الخطأ margin of error. يعتمد هامش الخطأ على الانحراف المعياري في أشكال بيانية مثل السابقة المشار إليها.

كلما كبر حجم العينة قل هامش الخطأ. افترض أن استطلاعاً أظهر أن 59% من الذين لهم حق التصويت في الانتخابات يفضلون مرشحاً معيناً (ح) بهامش خطأ ±3%، فإن مدى التناسب الحقيقي للمجتمع يبدو كما في الشكل المجاور.

تناسب العينة (نسبة الإجابات الصحيحة في العينة)	عدد العينات
$\frac{4}{20} = 0.2$	1
$\frac{5}{20} = 0.25$	2
$\frac{6}{20} = 0.3$	1
$\frac{8}{20} = 0.4$	4
$\frac{9}{20} = 0.45$	5
$\frac{10}{20} = 0.5$	2
$\frac{11}{20} = 0.55$	3
$\frac{12}{20} = 0.6$	1
$\frac{15}{20} = 0.75$	1
المجموع الكلي	20 عينة



شكل (ج)

مثال

ما حجم العينة التي تعطي هامش خطأ قدره ±3%؟

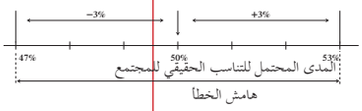
الحل

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.03$$
$$\sqrt{n} = \frac{1}{0.03} = 33.33$$
$$n \approx 1111$$

حجم العينة = 1111 تقريباً

تدريب

خمن بذكاء كيف يتأثر هامش الخطأ إذا ما تضاعف حجم العينة؟ احسب هامش الخطأ لعينة حجمها 100.



٩٣

الطريقة الوحيدة للتعرف على التناسب الحقيقي لمجتمع ما هو استطلاع كل شخص في المجتمع. مثل هذا الاستطلاع لا يصبح عينة، إنه تعداد إحصائي census.

هامش الخطأ: عند اختبار عينة حجمها (n) من مجتمع كبير الحجم، فإن تناسب العينة يكون له هامش خطأ حيث:

هامش الخطأ = $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال:

إذا كان حجم العينة 400 فإن هامش الخطأ في تناسب العينة يساوي تقريباً.

$\pm\frac{1}{\sqrt{400}} = \pm\frac{1}{20} = \pm 0.05 = \pm 5\%$

وبصفة عامة:

هامش الخطأ المحتمل للمجتمع ≈ تناسب العينة ± هامش خطأ العينة.

ويستخدم المصطلح تناسب المجتمع أحياناً بمعنى هامش الخطأ للمجتمع.

مثال تطبيقات حياتية

استطلاع رأي عام: في استطلاع لعدد 657 طالباً، ذكر 29% منهم أن اختبار الرياضيات في الامتحان صعب.

(أ) احسب هامش الخطأ في هذه العينة.

(ب) استخدم هامش الخطأ لإيجاد الفترة التي من المحتمل أن تتضمن التناسب الحقيقي للمجتمع.

الحل

(أ) هامش الخطأ $= \pm\frac{1}{\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{657}}$

$$\approx \pm\frac{1}{25.239} \approx \pm 0.0396 \approx \pm 4\%$$

(ب) هامش الخطأ لتناسب المجتمع يكون فترة يقع تناسب العينة في منتصفها.

الهامش المطلوب من المحتمل أن يقع بين 25%، و33%.

تدريب

حاول الآتي: لكل استطلاع من الآتي أوجد:

(أ) تناسب العينة. (ب) هامش الخطأ.

(ج) فترة من المحتمل أن تحتوي على الهامش الحقيقي للمجتمع.

١– استطلاع 400 طالب، وجد أن 216 منهم لم يسبق لهم ركوب طائرة.

٢– استطلاع 1 085 من أصحاب البطاقات الانتخابية، وجد أن 564 منهم يفضلون المرشح (ع).

تمارين

١– عبّر عن تناسب العينة كنسبة مئوية في كل من الآتي:

(أ) 837 شخصاً من بين 1150 لم تسجل لهم مخالفات مرور.

(ب) 27 متسوقاً من بين 60 يفضلون استخدام المحلات الكبرى عند الشراء.

(ج) 532 ربة منزل من بين 580 يفضلن السخانات الكهربائية.

٢– أوجد هامش الخطأ لتناسب العينة لكل من العينات التي حجمها (n) كالآتي:

(أ) 200 ± 7.1% (ب) 400 ± 5% (ج) 800 ± 3,5%

(د) 1 000 ± 3.2% (هـ) 1 200 ± 2.9%

٣– فيما يلي بعض طرق اختيار العينة. ابحث عما إذا كان هناك أي تحيز في المعاينة (اختيار العينة). عندما يكون مناسباً، اقترح طريقة تكون أكثر احتمالاً في أن تكون العينة عشوائية.

(أ) أراد مدير أحد المحلات أن يوجد تناسب عينة من الزبائن الذين يدخلون إلى محله قبل الظهر. يجري المدير مقابلات مع كل زبون يدخل إلى قسم المواد الغذائية.

٩٤

Draft

(٣) يقترح إجراء المقابلات عند مدخل المحل للحصول على عينة عشوائية بطريقة أفضل.
(ب) مستخدمو سيارات الكلية سيكونون ممثلين أكثر من غيرهم – يقترح أخذ العينة عشوائياً من داخل قاعات الدراسة.
(ج) العينة غير متحيزة.

(٤) مثلاً: ما خططك بعد حصولك على شهادة الدراسة الثانوية بالنسبة إلى الالتحاق بالجامعة، أو بالنسبة إلى الالتحاق بعمل مباشرة؟ اختر عينة عشوائية غير متحيزة.

(٥) (أ) 100، (ب) 278، (ج) 400، (د) 625، (هـ) 2500

(٦) (أ) $50\%, \pm 10\%$
(ب) $10.7\%, \pm 3.3\%$
(ج) $31.25\%, \pm 12.5\%$
(د) $40\%, \pm 6.3\%$
(هـ) $35\%, \pm 4.5\%$

(٧) (هـ) 10 000

(٨) (أ) $55\% - 63\%$ (ب) $57\% - 67\%$
(ج) $82\% - 88\%$

(٩) اطلب إلى الطلاب كتابة التقارير بخصوص الاستطلاع المبين ونتائجه. يفضل في مجموعات تعاونية أو كواجب منزلي فردي.

(١٠) (أ) 220 22 ليرة (ب) 000 50 ليرة
ندرة الاستطلاعات يكون فيها هامش الخطأ منخفضاً بسبب ارتفاع تكلفتها.

(١١) النتيجة (أ) تدعو إلى القلق لأن هامش الخطأ ≈ 0.08 ويجعل تناسب العينة في الفترة $48\% - 64\%$ مما يتضمن إمكانية أنها قد تحصل على أقل من 50% من التصويت (48% أو 49% ...) بما لا يتيح لها فرصة الفوز. النتيجة (ب) تدعو إلى ثقة أكبر، ويحصل تناسب العينة في الفترة $51\% - 59\%$.

(١٢) ١) $58\% - 68\%, \pm 5\%, 63\%$
٢) $87.5\% - 96.5\%, \pm 4.5\%, 92\%$
٣) $1.5\% - 12.5\%, \pm 5.5\%, 7\%$
٤) $62.1\% - 71.9\%, \pm 4.9\%, 67\%$

(ب) يرغب اتحاد الطلاب في إحدى الكليات الجامعية أن يوجد تقديراً لعدد الطلاب الذين يعملون في وظائف بعد نهاية اليوم الدراسي. مستطلع الآراء المكلَّف يُجري مقابلات شخصية مع مجموعة طلاب يختارون عشوائياً من بين الطلاب الذين يركبون سيارات الكلية عند نهاية اليوم الدراسي.
(ج) فريق الصيانة في مبنى مجمع حكومي يرغب في تقدير عدد أجهزة التهوية في الأدوار التي تحتاج إلى تغيير من بين 3 000 جهاز في المبنى. الفريق يختار عشوائياً 5 أجهزة في كل دور للكشف عليها.
٤– تفكير حر مفتوح: بفرض أنك ترغب في أن توجد تناسب مجتمع الطلاب في مدرستك الذين ينوون الالتحاق بالجامعة بعد الانتهاء من مرحلة الدراسة الثانوية، ما السؤال الذي يمكنك أن تسأله للطلاب؟ صِفْ طريقة اختيارك للعينة التي سوف تستخدمها. حدّد أيّ تحيز يمكن أن يكون في العينة.
٥– أوجد حجم العينة التي ينتج عنها هامش الخطأ في كل مما يأتي:
(أ) $\pm 10\%$ (ب) $\pm 6\%$ (ج) $\pm 5\%$ (د) $\pm 4\%$ (هـ) $\pm 2\%$
٦– حدث معين يقع x من المرات في عينة حجمها n. أوجد تناسب العينة وهامش الخطأ في كل من الحالات الآتية:
(أ) $x = 50$، $n = 100$ (ب) $x = 96$، $n = 900$
(ج) $x = 20$، $n = 64$ (د) $x = 100$، $n = 250$
(هـ) $x = 175$، $n = 500$
٧– ما حجم العينة التي يكون لها هامش خطأ قدره $\pm 10\%$؟
(أ) 100 (ب) 500 (ج) 1 000 (د) 5 000 (هـ) 10 000
٨– أوجد فترة من المحتمل أن تتضمن التناسب الحقيقي للمجتمع في كل من العينات الآتية:
(أ) 59% من بين 750 تم استطلاع رأيهم يعتقدون أن برامج التليفزيون تظهر المساواة بين الأولاد والبنات.
(ب) 62% من بين 400 طالب في الثانوية العامة يخططون للالتحاق بجامعات خارج محافظاتهم.
(ج) 85% من بين 1 017 شخصاً يقولون إنهم يحبون سماع الموسيقى الشرقية.
٩– كتابة تقرير: اكتب مقالاً خبرياً تذكر فيه تناسب العينة، وهامش الخطأ في نتائج الاستطلاع المبين.0
١٠– تفكير ناقد:
(أ) بفرض أنه في دراسة إحصائية معينة، وجد أن المقابلة الشخصية لكل شخص تكلف 20 ليرة. أوجد تكلفة عينة يكون هامش الخطأ فيها $\pm 3\%$.
(ب) أوجد تكلفة مقابلة عينة هامش الخطأ فيها $\pm 2\%$. لماذا تعتقد أن الاستطلاعات التي هامش الخطأ فيها منخفض تكون نادرة؟
١١– استطلاعات انتخابية:
(أ) في استطلاع رأي لعدد 150 من الذين لهم حق التصويت وُجد أن المرشحة ميرنا تسبق منافسها بنسبة 56% إلى 44%. هل تعتقد أن المرشحة ميرنا تشعر بقلق تجاه هذه النتيجة الاستطلاعية؟ اشرح رأيك.
(ب) في استطلاع لعدد 600 ممن لهم حق التصويت تبين أن ميرنا تسبق منافسها بـ 55% إلى 45%. هل تعتقد أن ميرنا ينبغي أن تكون أكثر ثقة أو أقل

استطلاع رأي
هل تدعو أكثر من ٥٪ من دخلك ؟
النتيجة نعم : ٣٧٠ لا : ٥٨٣

٩٥

Draft

ثقة بإمكانية فوزها حسب هذه النتيجة؟ اشرح رأيك.

١٢– في كل مما يأتي أوجد:

(أ) تناسب العينة. (ب) هامش الخطأ.

(ج) فترة يحتمل أن تتضمن التناسب الحقيقي للمجتمع الكلي.

١) في عينة عشوائية حجمها 408 سواح، وجد أن 258 منهم يفضلون رحلة واحدة كبيرة كل سنة على العديد من الرحلات الصغيرة.

٢) من بين 500 شاب وُجد أن 460 منهم يرون أنه يجب على المسؤولين أن يبذلوا جهوداً أكبر لحل مشكلات أوقات الفراغ عندهم.

٣) في منطقة عشوائية وُجد أن 23 من بين 325 ساكناً يدخنون السجائر.

٤) من بين 420 عاملاً في الإدارة التعليمية وجد أن 283 منهم حصلوا على جوائز تفوق في أداء العمل.

تمارين عامة

١– احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمدى والانحراف المعياري لكل من مجموعات البيانات الآتية:

(أ) 25، 29، 34، 34، 36، 45 (ب) 12، 9، 10، 11، 14، 10

(ج) 3، 1، 5، 2، 1، 4، 1، 3، 2

٢– **تجارة:** في استطلاع لعدد 683 من مالكي السيارات تم اختيارهم عشوائيّاً، وجد أن 235 منهم اشتروا السيارة الأولى نقداً. أوجد:

(أ) تناسب العينة. (ب) هامش الخطأ.

(ج) فترة تشمل التناسب الحقيقي للمجتمع.

٣– أي من مجموعات البيانات الآتية لها أصغر متوسط؟

(أ) 15، 13، 12، 11، 10 (ب) 18، 17، 15، 10، 8

(ج) 23، 20، 19، 1، 0 (د) 19، 6، 14، 14، 5

(هـ) 7، 9، 5، 3، 2

نموذج اختبار:

١– فيما يلي متوسط عدد الساعات التي تشاهد فيها إحدى الأسر القنوات التليفزيونية في كل يوم من أيام الأسبوع.

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
1	4	3	2	3	4	4

(أ) أوجد متوسط عدد الساعات في الأسبوع.

(ب) أوجد الانحراف المعياري لعدد الساعات في الأسبوع.

٢– (أ) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة البيانات الآتية:

30، 14، 13، 13، 14، 8، 11، 10، 13

(ب) احسب المتوسط الحسابي بعد استبعاد القيمة المتطرفة.

٣– احسب هامش الخطأ في عينة حجمها 500.

٤– استكشف أي تحيز ممكن أن يقع في الطرق الآتية لاختيار عينة.

(أ) سؤال مشاهدي مسلسل (باب الحارة) للاتصال الهاتفي لتسمية الممثل المفضل.

(ب) مقابلة أول 100 تلميذ يدخلون المدرسة في أحد الأيام؛ لاستطلاع الرأي بشأن نظافة المدرسة.

٩٦

تمارين عامة ص ٩٦

(١) (أ) 33.8, 34, 34, 20, 6.2

(ب) 11, 10.5, 10, 5, 1.6

(ج) 2.44, 2, 1, 4, 1.34

(٢) (أ) 34.4%

(ب) ±3.8%

(ج) 30.6% – 38.2%

(٣) (هـ) 5.2

Draft