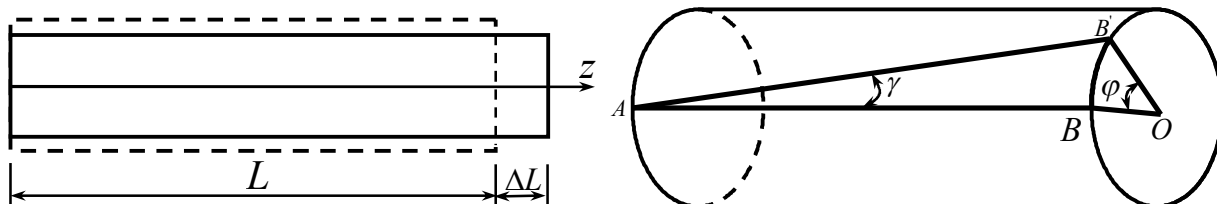


Chương 07

TÍNH CHUYỂN VỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các khái niệm



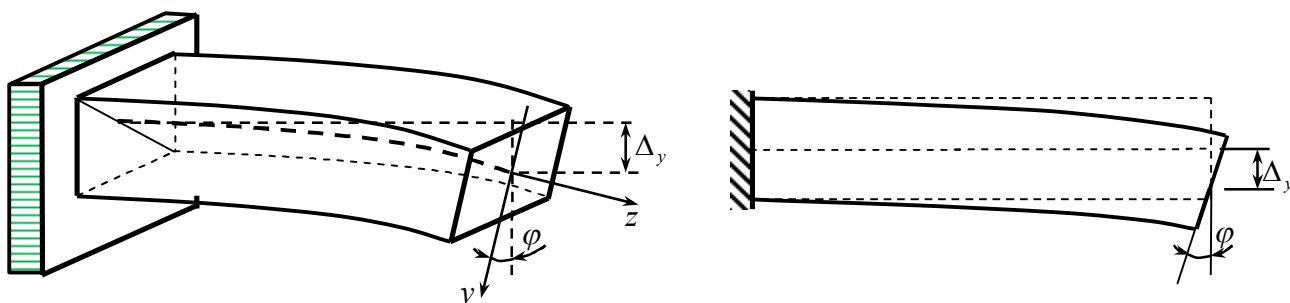
- ❖ Thanh chịu kéo-nén đúng tâm có biến dạng dài dọc trục:

$$\Delta L = \int_L \frac{N_z}{EF} dz; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta L}{L}; \quad \varepsilon_n = -\mu \varepsilon_z$$

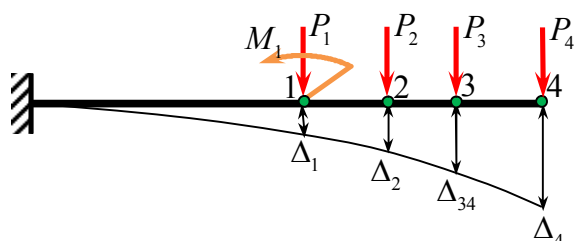
- ❖ Thanh tròn chịu xoắn có biến dạng góc:

$$\varphi = \int_L \frac{M_z}{GJ_\rho} dz; \quad \gamma = \frac{\sigma_z}{G}$$

- ❖ Thanh chịu uốn phẳng:



- Δ_y chuyển vị thẳng của trọng tâm mặt cắt ngang theo phương vuông góc với trục thanh.
- φ góc xoay của mặt cắt ngang quanh một trục nằm trong mặt cắt ngang.



- ❖ Kí hiệu cho đại lượng lực (bao gồm lực tập trung và ngẫu lực): P_k là lực tại vị trí và theo phương k .
- ❖ Kí hiệu cho đại lượng chuyển vị: Δ
 - Δ_k : chuyển vị tại vị trí và theo phương k .
 - Δ_{km} : chuyển vị tại vị trí và theo phương k do lực P_m sinh ra.
- ❖ δ_{km} : chuyển vị đơn vị tại vị trí và theo phương k do tải trọng $P_m = 1$ gây ra.
- ❖ Vật liệu đàn hồi tuyến tính nên ta có: $\Delta_{km} = P_m \cdot \delta_{km}$ và $\Delta_k = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \delta_{ki}$

2. Thế năng biến dạng đàn hồi

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{N_z^2}{2EF} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_y^2}{2EJ_y} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_z^2}{2GJ_\rho} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} k_x \cdot \frac{Q_y^2}{2GF} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} k_y \cdot \frac{Q_x^2}{2GF} dz$$

$$\text{Với } k_x = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_x^2}{b_C^2} dF; k_y = \frac{F}{J_y^2} \int_F \frac{S_y^2}{h_C^2} dF$$

- ❖ Đối với dầm chịu uốn phẳng, bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz$$

- ❖ Đối với bài toán thanh chịu kéo nén đúng tâm:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{N_z^2}{2EF} dz$$

- ❖ Đối với thanh chịu xoắn thuần túy:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_z^2}{2EJ_\rho} dz$$

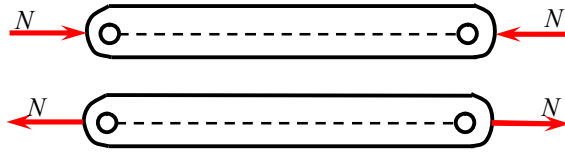
3. Định lý Castigliano

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

⇒ Trong hệ dầm hồi tuyến tính, chuyển vị tại một vị trí và theo một phương nào đó bằng đạo hàm riêng của thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ lấy đối với biến số là lực tại vị trí và theo phương cần tính chuyển vị.

- ❖ Xét hệ thanh chịu kéo-nén đúng tâm:

$$\text{Ta có: } U = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{N_z^2}{2EF} dz \quad \text{nên} \quad \Delta_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U_i}{\partial P_k} = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{N_{z_i}}{E_i F_i} \frac{\partial N_{z_i}}{\partial P_k} dz$$



- Nếu xét hệ thanh-khớp: N_z , EF là hằng số trên suốt chiều dài thanh

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{z_i}}{E_i F_i} \frac{\partial N_{z_i}}{\partial P_k} L_i$$

- Nếu tại vị trí và theo phương cần tính chuyển vị không có lực P_k , ta đặt một lực P_g tại vị trí và theo phương cần tính chuyển vị. Sau khi lấy đạo hàm $\frac{\partial N_z}{\partial P_g}$ ta cho $P_g = 0$.

4. Công thức Mohr

- ❖ Trạng thái “m” là trạng thái chịu tải
- ❖ Trạng thái “k” là trạng thái bỏ tải và đặt một lực $P_k = 1$ tại vị trí và theo phương cần tính chuyển vị.

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{\bar{N}_{z_i} N_{z_i}}{E_i F_i} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{\bar{M}_{x_i} M_{x_i}}{E_i J_{x_i}} dz + \sum_{i=1}^n \int_{L_i} k_x \frac{\bar{Q}_{y_i} Q_{y_i}}{G_i F_i} dz$$

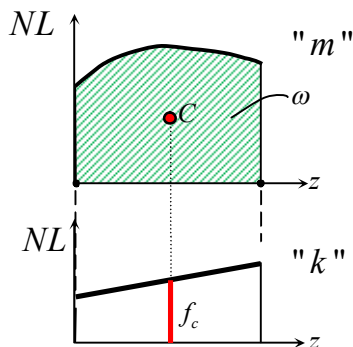
- ❖ Xét hệ thanh-khớp chịu kéo-nén đúng tâm có N_z , EF là hằng số trên suốt chiều dài

$$\text{thanh: } \Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{z_i} N_{z_i}}{E_i F_i} L_i$$

Trong đó: + \bar{N}_z : nội lực ở trạng thái “k”

+ N_z : nội lực ở trạng thái “m”

5. Phép nhân “biểu đồ” Vêrêxaghin

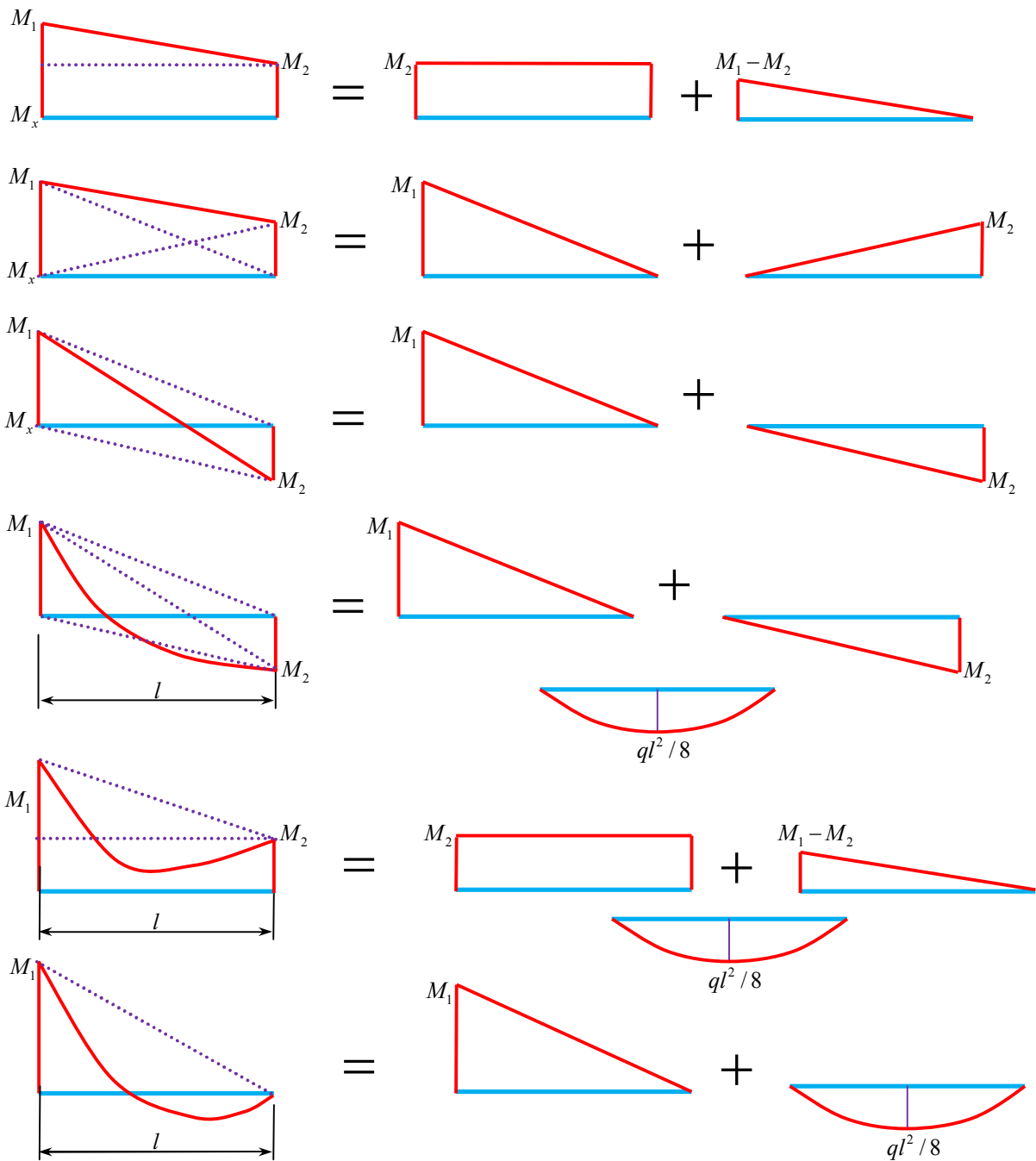


$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i f_{c_i}}{E_i F_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i f_{c_i}}{E_i J_i}$$

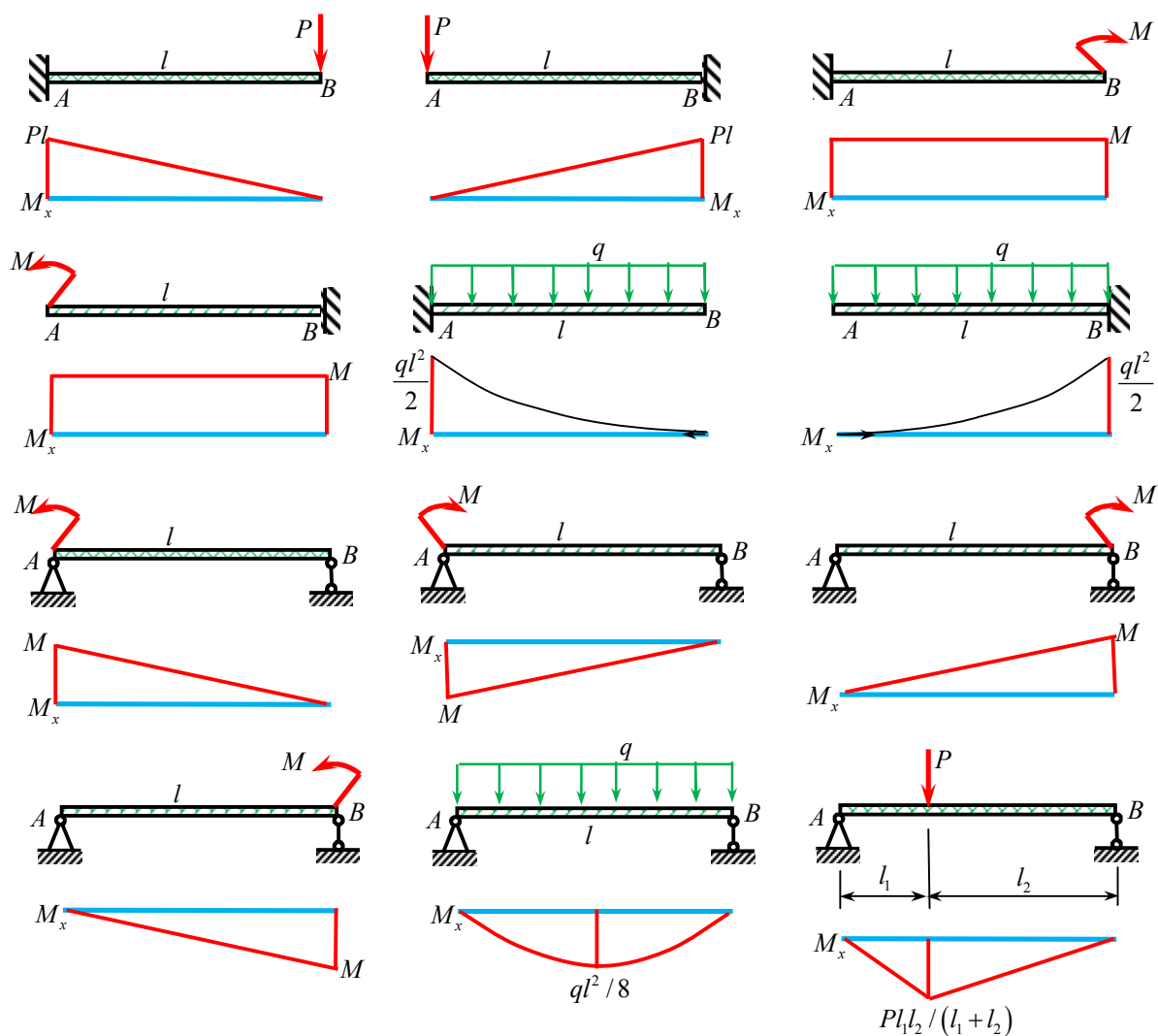
Trong đó: + ω : diện tích biểu đồ nội lực ở trạng thái “m”

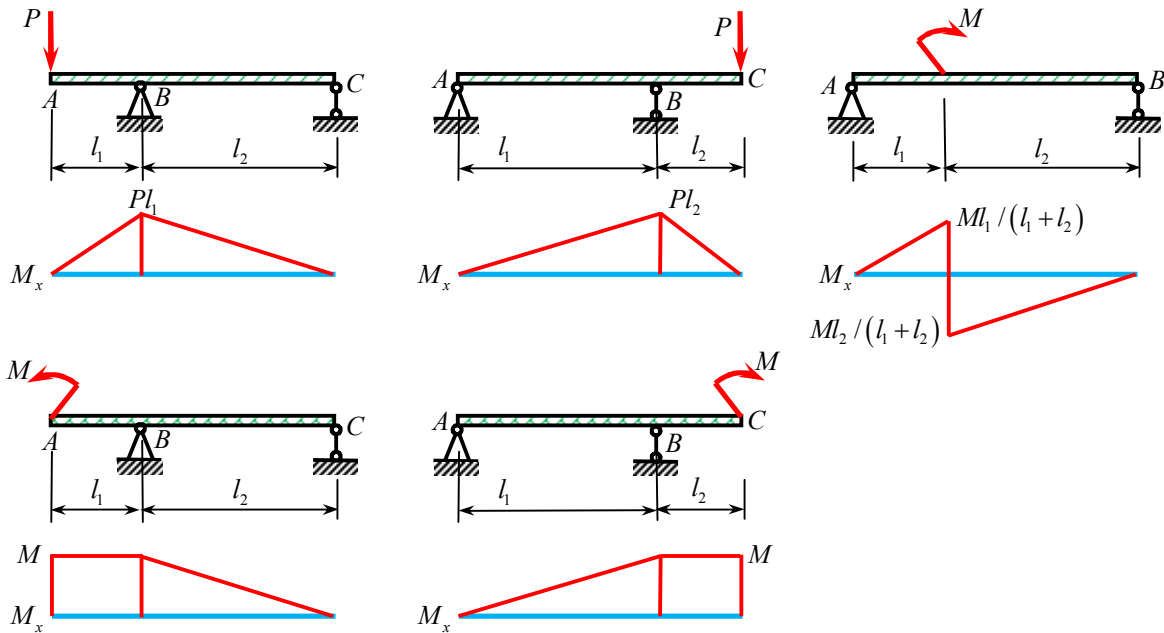
+ f_c : cao độ biểu đồ nội lực ở trạng thái “k” lấy tại trọng tâm biểu đồ mômen uốn ở trạng thái “m”

- ❖ Trạng thái “m” là trạng thái chịu tải
- ❖ Trạng thái “k” là trạng thái bỏ tải và
 - Đặt một lực $P_k = 1$ tại vị trí và theo phương cần tính chuyển vị thẳng
 - Đặt một ngẫu lực $M_k = 1$ tại vị trí cần tính góc xoay.
- ❖ Những lưu ý khi thực hiện phép nhân biểu đồ:
 - Tung độ f_c nhất thiết phải lấy ở đồ thị của đường bậc nhất (hoặc hằng số). Đường bậc nhất không bị gãy. Nếu cả hai hàm đều là bậc nhất thì có thể lấy diện tích ω ở một đồ thị, còn tung độ f_c lấy ở đồ thị còn lại.
 - Trước mỗi số hạng của phép nhân, $\omega_i f_{c_i}$, lấy dấu dương khi diện tích và tung độ cùng nằm về một phía của đường chuẩn và ngược lại.
 - Nếu đồ thị bậc nhất định lấy tung độ f_c bị gãy thì phải chia chiều dài ra nhiều đoạn sao cho trên mỗi đoạn đường bậc nhất trở thành trơn, thực hiện phép nhân cho từng đoạn rồi cộng kết quả với nhau. Biểu đồ lấy diện tích ω không bị điều kiện này hạn chế.
 - Đối với diện tích của các hình phức tạp, có thể chia thành những hình đơn giản, áp dụng nhân biểu đồ cho từng hình rồi thực hiện phép tổng.
 - Kết quả của phép nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng bằng không.



❖ Biểu đồ nội lực một số dạng cơ bản

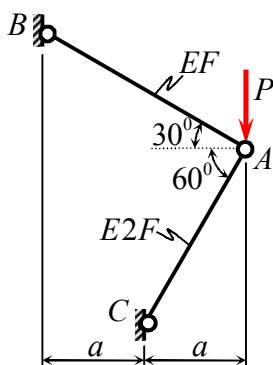




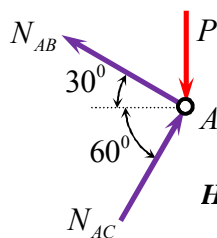
II. VÍ DỤ

VD.9.1. Ví dụ 1: Hai thanh AB và AC làm cùng một loại vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]$, mô đun đàn hồi E , diện tích mặt cắt ngang của hai thanh lần lượt là F và $2F$. Hai thanh chịu liên kết khớp tại B và C, được nối với nhau bởi khớp A. Kích thước và tải trọng tác dụng lên kết cấu như **hình 9.1a**. Biết: $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$; $P = 150 \text{ kN}$; $a = 2 \text{ m}$; $E = 2100 \text{ kN/cm}^2$

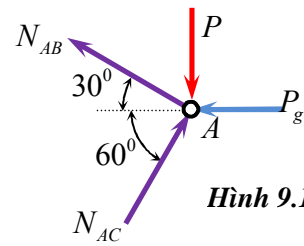
- Xác định ứng lực trong hai thanh AB và AC.
- Xác định diện tích mặt cắt ngang (F) để hai thanh AB và AC cùng bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng tại A.
- Tính chuyển vị ngang tại A.



Hình 9.1a.



Hình 9.1b.



Hình 9.1c.

- Tách nút tại A, đặt các ứng lực của hai thanh như **hình 9.2b**. Xét cân bằng tại khớp A.

$$\sum X = -N_{AB} \cos 30^\circ + N_{AC} \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow N_{AC} = \sqrt{3} N_{AB} \quad (1).$$

$$\sum Y = N_{AB} \sin 30^\circ + N_{AC} \sin 60^\circ - P = 0 \Rightarrow N_{AB} + \sqrt{3} N_{AC} = 2P \quad (2).$$

Thay (1) vào (2): $N_{AB} + 3N_{AB} = 2P \Rightarrow N_{AB} = \frac{1}{2}P$, $N_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P$

b) Ứng suất phát sinh trong hai thanh AB và AC

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} \quad (\text{thanh AB chịu kéo})$$

$$\sigma_{AC} = -\frac{N_{AC}}{2F} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{P}{F} \quad (\text{thanh AC chịu nén})$$

Ứng suất lớn nhất phát sinh trong kết cấu: $|\sigma_z|_{\max} = \sigma_{AB} = \frac{P}{2F}$

Theo điều kiện bền: $\sigma_{AB} = \frac{P}{2F} \leq [\sigma] \Rightarrow F \geq \frac{P}{2[\sigma]} = \frac{150}{2.21} \text{ cm}^2 = 3,57 \text{ cm}^2$.

Chọn $F = 3,6 \text{ cm}^2$.

c) Chuyển vị thẳng đứng tại A

Áp dụng định lý Castigliano: $\Delta_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_{z,i}}{E_i F_i} \frac{\partial N_{z,i}}{\partial P_k} L_i = \frac{N_{AB}}{E_{AB} F_{AB}} \frac{\partial N_{AB}}{\partial P} L_{AB} + \frac{N_{AC}}{E_{AC} F_{AC}} \frac{\partial N_{AC}}{\partial P} L_{AC}$

Ta có: $\frac{\partial N_{AB}}{\partial P} = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial N_{AC}}{\partial P} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Nên chuyển vị thẳng đứng tại A: $\Delta_{A_y} = \frac{P}{EF} \frac{1}{2} \frac{4a}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}P}{E2F} \frac{\sqrt{3}}{2} 2a = \frac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \frac{Pa}{EF} = \frac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \frac{150.200}{2100.3,6} = 5,267 \text{ cm}$

d) Chuyển vị theo phương ngang tại A

Đặt thêm lực P_g vào hệ như hình 9.1c, xét cân bằng nút A: $\Rightarrow \begin{cases} N_{AB} = \frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}P_g \\ N_{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P + \frac{1}{2}P_g \end{cases}$

Áp dụng định lý Castigliano: $\Delta_k = \sum_{i=1}^n \frac{N_{z,i}}{E_i F_i} \frac{\partial N_{z,i}}{\partial P_g} L_i = \frac{N_{AB}}{E_{AB} F_{AB}} \frac{\partial N_{AB}}{\partial P_g} L_{AB} + \frac{N_{AC}}{E_{AC} F_{AC}} \frac{\partial N_{AC}}{\partial P_g} L_{AC}$

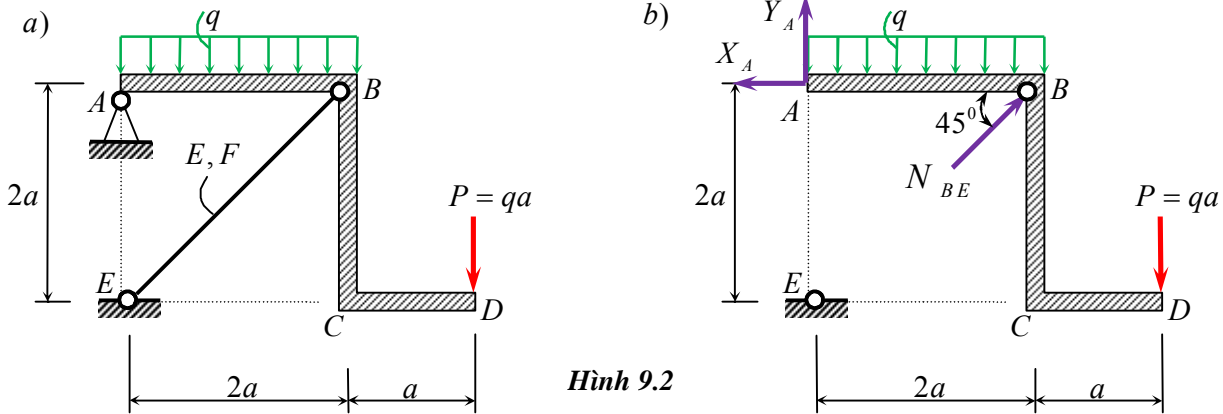
Ta có: $\frac{\partial N_{AB}}{\partial P_g} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\partial N_{AC}}{\partial P_g} = \frac{1}{2}$

Nên chuyển vị ngang tại A: $\Delta_{A_x} = \frac{P}{EF} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{4a}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}P}{E2F} \frac{1}{2} 2a = \frac{\sqrt{3}-4}{4} \frac{Pa}{EF} = \frac{\sqrt{3}-4}{4} \frac{150.200}{2100.3,6} = -2,25 \text{ cm}$

VD.9.2. Ví dụ 2: Thanh ABCD tuyệt đối cứng chịu liên kết khớp xoay tại A và được giữ bởi thanh EB như hình 9.2a. Thanh EB làm bằng vật liệu có mô đun đàn hồi E và ứng suất cho phép $[\sigma]$ và diện tích mặt cắt ngang F. Cho: $[\sigma] = 19 \text{ kN/cm}^2$; $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$; $q = 15 \text{ kN/m}$; $a = 2,5 \text{ m}$

a) Xác định ứng lực trong thanh EB theo q, a.

- b) Xác định diện tích mặt cắt ngang, F , để thanh EB bền.
 c) Với F tìm được, tính biến dạng dài dọc trục của thanh EB .
 d) Tính chuyển vị thẳng đứng tại D .



- Xét cân bằng thanh $ABCD$ như hình 9.2b

$$\sum m_A = 0 \Rightarrow q \cdot 2a \cdot a - N_{BE} \sin 45^\circ \cdot 2a + P \cdot 3a = 0 \Rightarrow N_{BE} = \sqrt{2}qa + \frac{3}{\sqrt{2}}P = \frac{5}{\sqrt{2}}qa$$

- Theo điều kiện bền: $\sigma_{BE} = \frac{5qa}{\sqrt{2}F} \leq [\sigma] \Rightarrow F \geq \frac{5qa}{\sqrt{2}[\sigma]} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 2,5}{\sqrt{2} \cdot 19} = 6,978 \text{ cm}^2$.

Chọn $F = 6,98 \text{ cm}^2$.

- Biến dạng dài dọc trục của thanh EB :

$$\Delta L_{BE} = \frac{N_{BE} L_{BE}}{EF} = \frac{\frac{5qa}{\sqrt{2}} \cdot 2a\sqrt{2}}{EF} = \frac{10qa^2}{EF} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 2,5^2 \cdot 100}{21000 \cdot 6,98} = 0,639 \text{ cm}$$

- Chuyển vị thẳng đứng tại D :

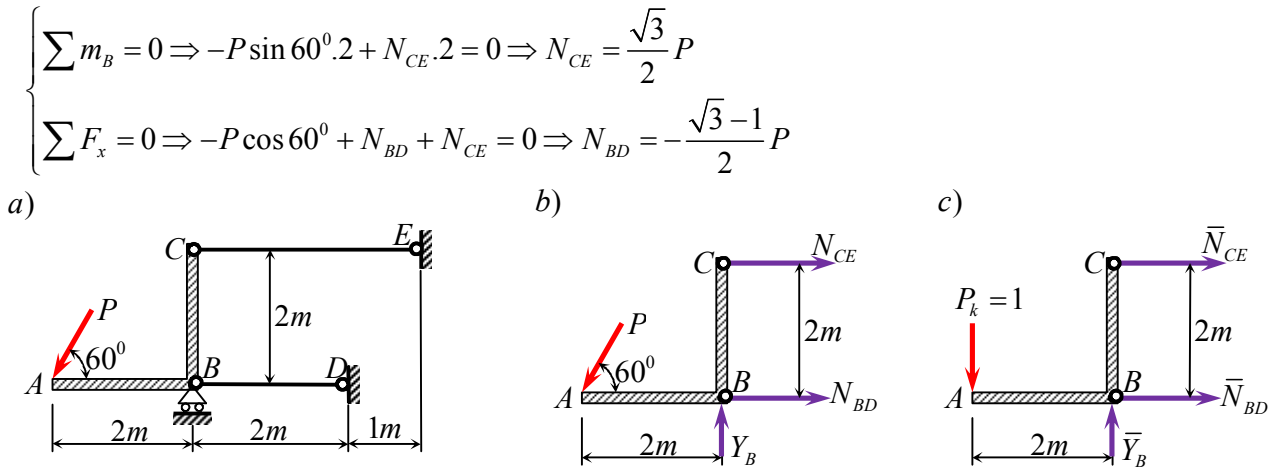
Áp dụng định lý Castigliano:

$$\Delta_D = \frac{N_{BE}}{E_{BE} F_{BE}} \frac{\partial N_{BE}}{\partial P} L_{BE} = \frac{\frac{5qa}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{EF} \cdot 2\sqrt{2}a = \frac{15\sqrt{2}qa^2}{EF} = \frac{15\sqrt{2} \cdot 15 \cdot 2,5^2 \cdot 100}{21000 \cdot 6,98} = 1,357 \text{ cm}$$

VD.9.3. Ví dụ 3: Thanh gậy khúc ABC tuyệt đối cứng chịu liên kết gối di động tại B và được giằng bởi các thanh BH , CD như hình 9.3. Các thanh BH , CD có cùng diện tích mặt cắt ngang F , mô đun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{ KN/cm}^2$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 18 \text{ kN/cm}^2$.

Cho: $P = 200 \text{ KN}$; $\left[\frac{\Delta L}{L} \right] \leq 3,6 \cdot 10^{-3}$.

- a) Xác định diện tích F theo điều kiện bền và điều kiện cứng.
 b) Tính chuyển vị thẳng đứng tại A .
 ▪ Xét cân bằng thanh ABC như hình 9.3b



Hình 9.3

- Theo điều kiện bền: $\sigma_{CE} = \frac{\sqrt{3}P}{2F} \leq [\sigma] \Rightarrow F \geq \frac{\sqrt{3}P}{2[\sigma]} = \frac{\sqrt{3} \cdot 200}{2 \cdot 218} = 9,62 \text{ cm}^2$.

- Theo điều kiện cứng:

$$\frac{\Delta L_{CE}}{L_{CE}} = \frac{N_{CE}}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{3}P}{2}}{EF} \leq \left[\frac{\Delta L}{L} \right] = 3,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow F \geq \frac{\sqrt{3}P}{2E \cdot \left[\frac{\Delta L}{L} \right]} = \frac{\sqrt{3} \cdot 200}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \text{ cm}^2$$

Chọn $F = 9,63 \text{ cm}^2$.

- Chuyển vị thẳng đứng tại A:

Ta có: $N_{CE} = \frac{\sqrt{3}}{2} P$; $N_{BD} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} P$

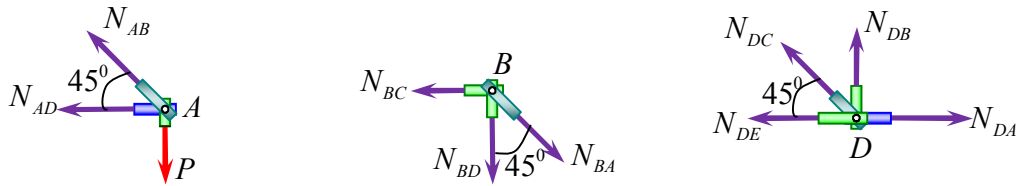
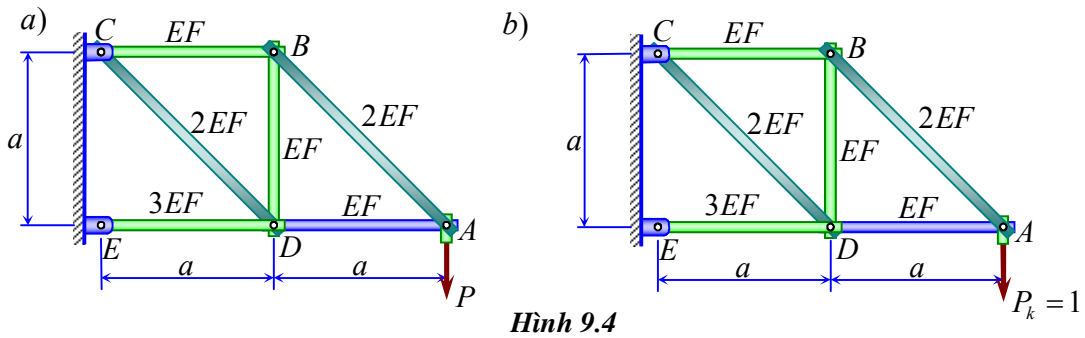
Tạo trạng thái “k” như hình 9.3c:

$$\begin{cases} \sum m_B = 0 \Rightarrow -1 \cdot 2 + \bar{N}_{CE} \cdot 2 = 0 \Rightarrow \bar{N}_{CE} = \frac{1}{2} \\ \sum F_x = 0 \Rightarrow \bar{N}_{BD} + \bar{N}_{CE} = 0 \Rightarrow \bar{N}_{BD} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Áp dụng công thức Mohr:

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i N_{ki}}{E_i F_i} L_i = \frac{\bar{N}_{CE} N_{CE}}{E_{CE} F_{CE}} L_{CE} + \frac{\bar{N}_{BD} N_{BD}}{E_{BD} F_{BD}} L_{BD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 9,63} 3000 + \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot 200 \right)}{2 \cdot 10^4 \cdot 9,63} 2000 = 1,73 \text{ mm}$$

VD.9.4. Ví dụ 4: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A của hệ dầm như hình 9.4a. Biết rằng các thanh trong dầm làm cùng vật liệu có mô đun đàn hồi E và có diện tích mặt cắt ngang như hình vẽ.

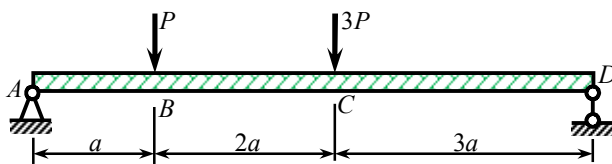


- Trạng thái “m” hệ chịu tác dụng của tải trọng P , dùng phương pháp tách nút xác định được ứng lực trong các thanh như bảng dưới.
- Trạng thái “k” hệ chịu tác dụng của một lực $\bar{P}_k = 1$ tại A, dùng phương pháp tách nút xác định được ứng lực trong các thanh như bảng dưới.

Thanh	N_m	\bar{N}_k	L	EF	$\frac{N_m \cdot \bar{N}_k}{EF} L$
AB	$\sqrt{2} P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} a$	$2EF$	$\sqrt{2} \frac{Pa}{EF}$
AD	$-P$	-1	a	EF	$\frac{Pa}{EF}$
BC	P	1	a	EF	$\frac{Pa}{EF}$
BD	$-P$	-1	a	EF	$\frac{Pa}{EF}$
CD	$\sqrt{2} P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} a$	EF	$\sqrt{2} \frac{Pa}{EF}$
DE	$-2P$	-2	a	$3EF$	$\frac{4}{3} \frac{Pa}{EF}$

$$\Delta_{Ay} = \left(\sqrt{2} + 1 + 1 + 1 + \sqrt{2} + \frac{4}{3} \right) \frac{Pa}{EF} = \frac{6\sqrt{2} + 13}{3} \frac{Pa}{EF} \approx 7,16 \frac{Pa}{EF}.$$

VD.9.5. Ví dụ 5: Dầm AD liên kết, chịu lực và có kích thước như hình 9.5. Dầm có độ cứng chống uốn $EJ = \text{const}$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C , tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A .



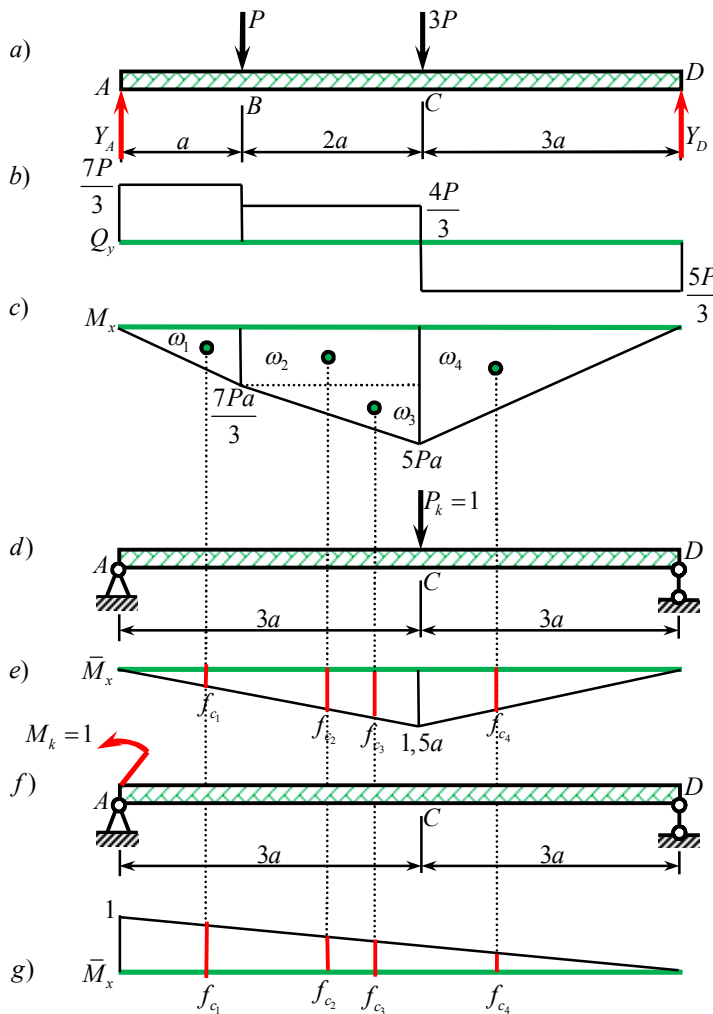
Hình 9.5

- Xác định phản lực liên kết:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 \Rightarrow P \cdot a + 3P \cdot 3a - Y_D \cdot 6a = 0 \Rightarrow Y_D = \frac{5}{3}P \\ \sum m_D = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 6a - P \cdot 5a - 3P \cdot 3a = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{7}{3}P \end{cases}$$

- Biểu đồ mô men uốn, lực cắt ở trạng thái “m” như hình a) , b) , c).
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình d) , e).
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{7}{6} Pa^2 \cdot \frac{a}{3} + \frac{14}{3} Pa^2 \cdot a + \frac{8}{3} Pa^2 \cdot \frac{7a}{6} + \frac{15}{2} Pa^2 \cdot a \right) = \frac{47}{3} \frac{Pa^3}{EJ}$$



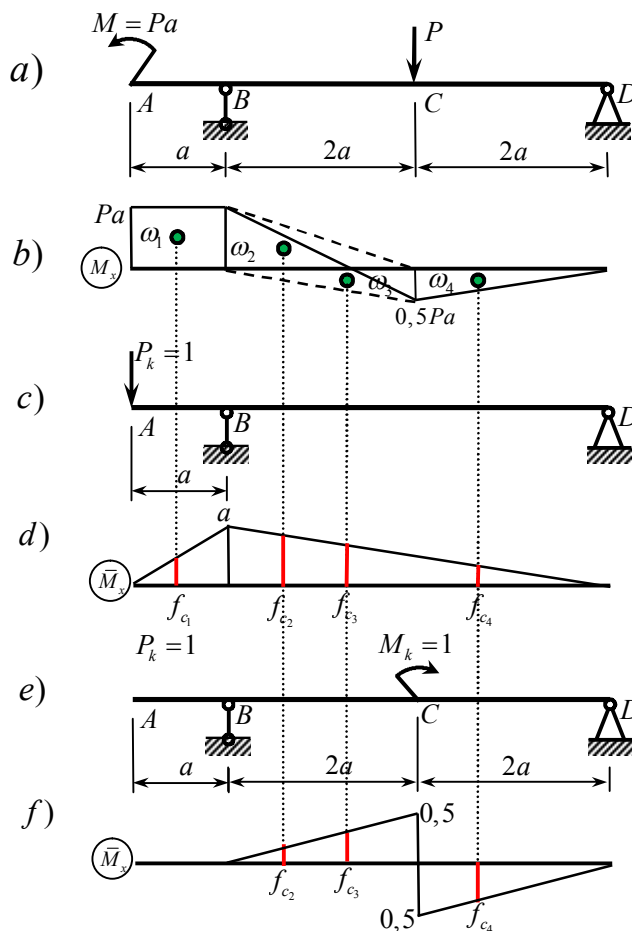
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình f) , g).
- Chuyển vị xoay của mặt cắt tại A :

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{7}{6} Pa^2 \cdot \frac{8}{9} + \frac{14}{3} Pa^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{8}{3} Pa^2 \cdot \frac{11}{18} + \frac{15}{2} Pa^2 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{149}{18} \frac{Pa^2}{EJ}$$

VD.9.6. Ví dụ 6: Dầm AD liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.6**. Dầm có độ cứng chống uốn $EJ = \text{const}$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại A , tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại C .

- Biểu đồ mô men uốn, lực cắt ở trạng thái “ m ” như hình $a)$, $b)$.
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “ k ” như hình $c)$, $d)$.
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại A :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(Pa^2 \cdot \frac{a}{2} + Pa^2 \cdot \frac{5}{6}a - 0,5Pa^2 \cdot \frac{2a}{3} - 0,5Pa^2 \cdot \frac{a}{3} \right) = \frac{5}{6} \frac{Pa^3}{EJ}$$

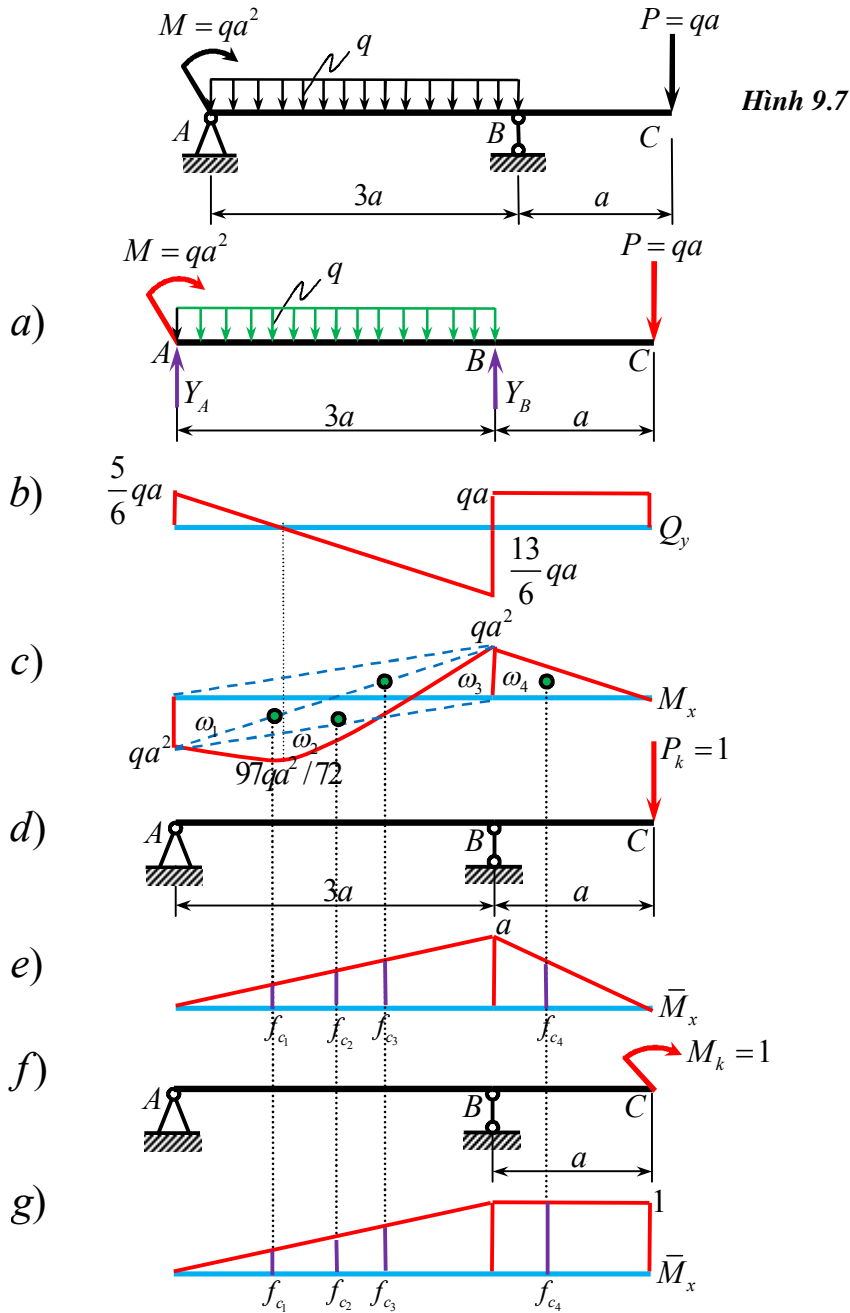


Hình 9.6

- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “ k ” như hình $c)$, $d)$.
- Chuyển vị xoay của mặt cắt tại C :

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(Pa^2 \cdot \frac{1}{6} - 0,5Pa^2 \cdot \frac{1}{3} + 0,5Pa^2 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \frac{Pa^2}{EJ}$$

VD.9.7. Ví dụ 7: Dầm AC liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.7**. Dầm có độ cứng chống uốn $EJ = \text{const}$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C , tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại C .



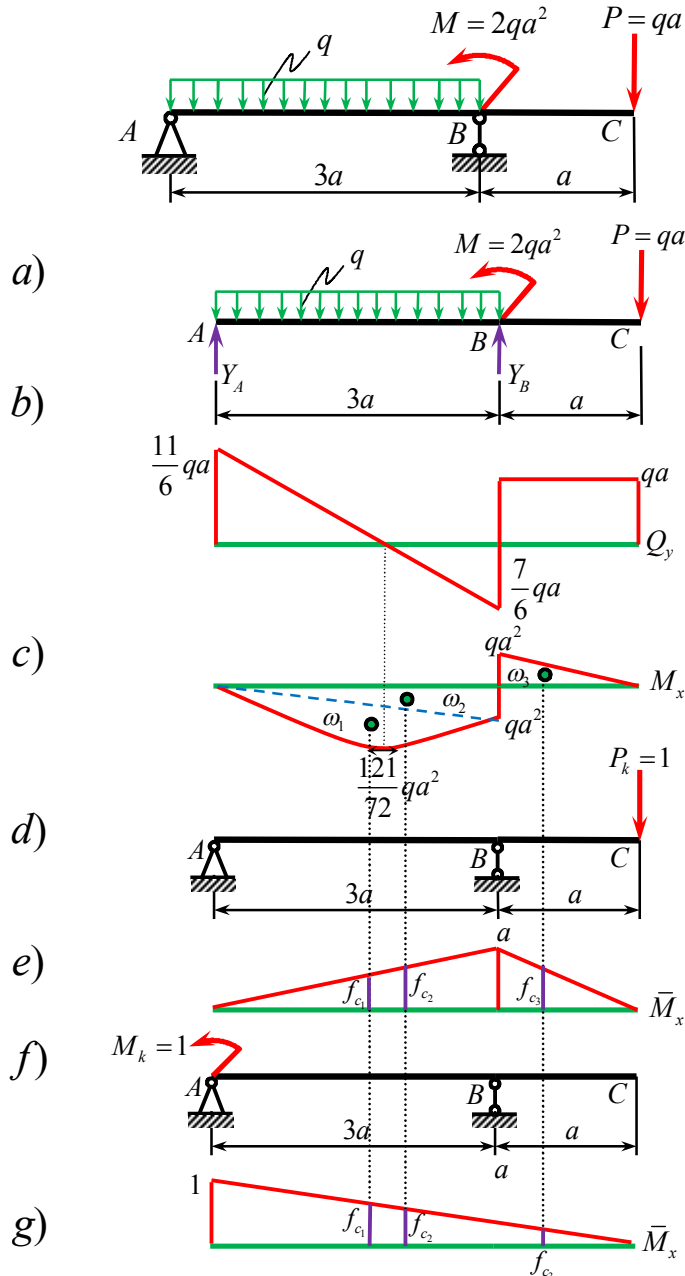
- Biểu đồ mô men uốn, lực cắt ở trạng thái “m” như hình a), b), c) .
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình d), e) .
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{a}{3} - \frac{9}{4} qa^3 \cdot \frac{a}{2} + \frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{2a}{3} + 0,5 qa^3 \cdot \frac{2a}{3} \right) = -\frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}$$

- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình f), g) .
- Chuyển vị xoay của mặt cắt tại C :

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^4 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{1}{3} - \frac{9}{4} qa^3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{2}{3} + 0,5 qa^3 \cdot 1 \right) = -\frac{1}{8} \frac{qa^3}{EJ}$$

VD.9.8. Ví dụ 8: Dầm AC liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.8**. Dầm có độ cứng chống uốn $EJ = const$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C, tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A.



Hình 9.8

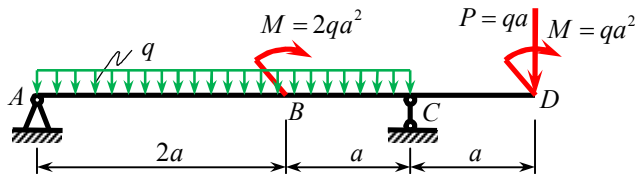
- Biểu đồ mô men uốn, lực cắt ở trạng thái “m” như hình a), b), c) .
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình d), e) .
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^3 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{9}{4} qa^3 \cdot \frac{a}{2} - \frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} qa^3 \cdot \frac{2a}{3} \right) = -\frac{43}{24} \frac{qa^4}{EJ}$$

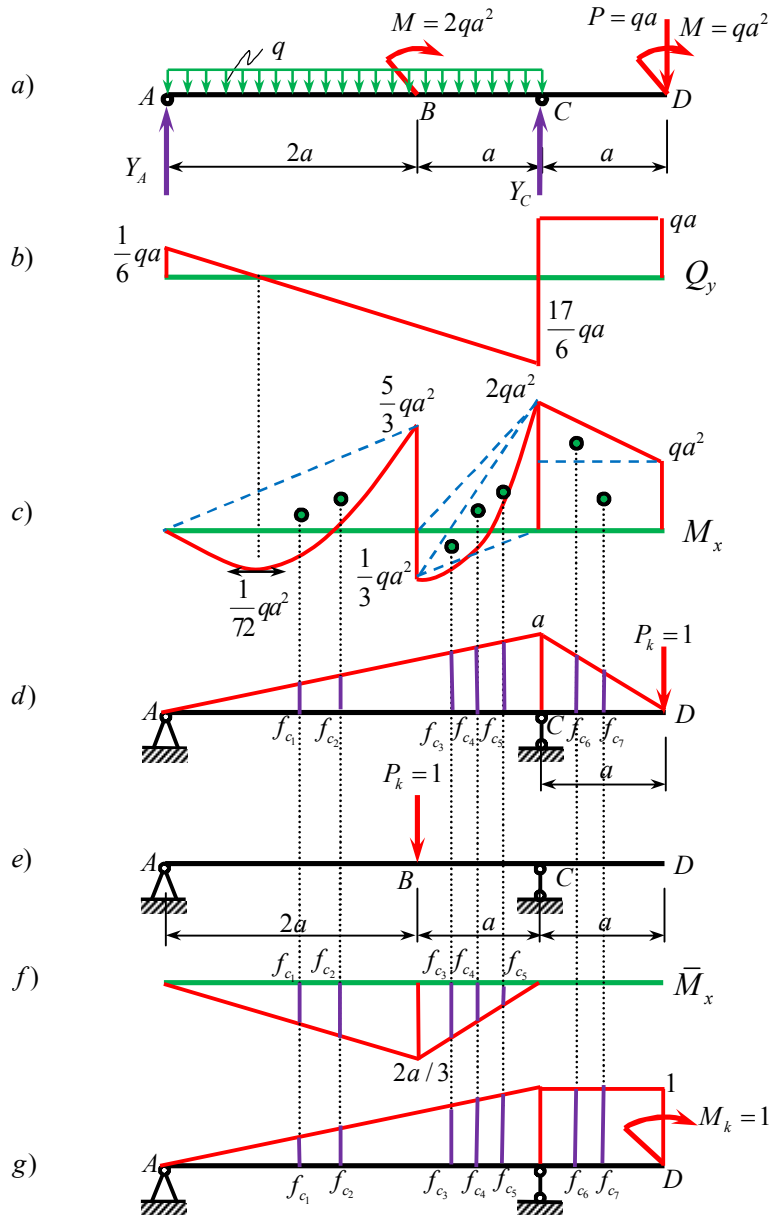
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình f), g).
- Chuyển vị xoay của mặt cắt tại A:

$$\varphi_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^3 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{9}{4} qa^3 \cdot \frac{5}{8} - \frac{3}{2} qa^3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} qa^3 \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{175}{96} \frac{qa^3}{EJ}$$

VD.9.9. Ví dụ 9: Dầm AD liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.9**. Dầm có độ cứng chống uốn $EJ = \text{const}$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại D, B, tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại D.



Hình 9.9



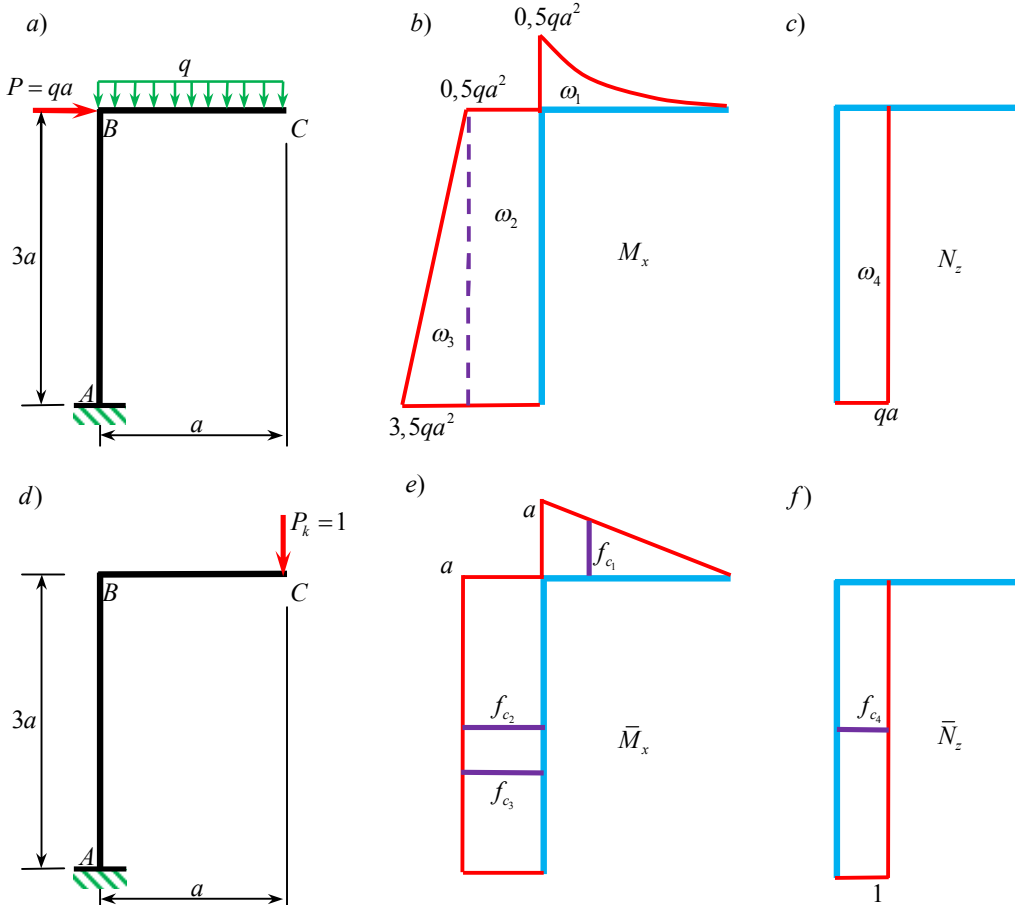
- Biểu đồ mô men uốn, lực cắt ở trạng thái “m” như hình a), b), c) .
- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình d) .
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại D :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^7 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{2}{3} qa^3 \cdot \frac{a}{3} + \frac{5}{3} qa^3 \cdot \frac{4a}{9} - \frac{1}{6} qa^3 \cdot \frac{7a}{9} - \frac{1}{12} qa^3 \cdot \frac{5a}{6} \right. \\ \left. + qa^3 \cdot \frac{8a}{9} + \frac{1}{2} qa^3 \cdot \frac{2a}{3} + qa^3 \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{49}{24} \frac{qa^4}{EJ}$$

- Biểu đồ mô men uốn ở trạng thái “k” như hình e), f) .
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại B :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^7 \omega_i f_{c_i} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{2}{3} qa^3 \cdot \frac{a}{3} - \frac{5}{3} qa^3 \cdot \frac{4a}{9} + \frac{1}{6} qa^3 \cdot \frac{4a}{9} + \frac{1}{12} qa^3 \cdot \frac{a}{3} - qa^3 \cdot \frac{2a}{9} \right) = -\frac{23}{36} \frac{qa^4}{EJ}$$

VD.9.10. Ví dụ 10: Khung ABC liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.10**. Dầm BC có độ cứng chống uốn $EJ = const$, cột AB có cứng chống uốn $EJ_2 = const$ và có diện tích mặt cắt ngang $F = const$. Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C .



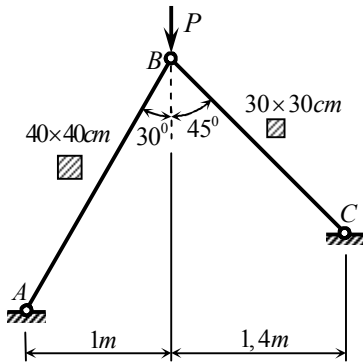
- Biểu đồ mô men uốn, lực dọc ở trạng thái “m” như hình a), b), c) .
- Biểu đồ mô men uốn, lực dọc ở trạng thái “k” như hình d), e), f) .
- Chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^3 \omega_i f_{c_i} + \frac{\omega_4 f_{c_4}}{EF} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} qa^3 \cdot \frac{3a}{4} + \frac{3}{2} qa^3 \cdot a + \frac{9}{2} qa^3 \cdot a \right) + \frac{3qa^2 \cdot 1}{EF} = 6,125 \frac{qa^4}{EJ} + \frac{3qa^2}{EF}$$

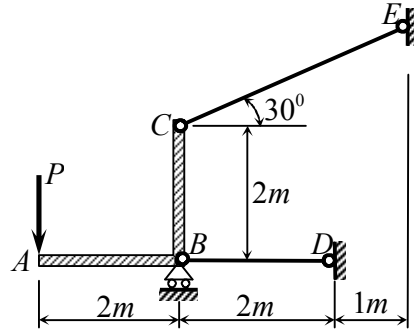
III.VÍ DỤ

9.1. Hệ thanh chịu lực như **hình 9.1**, các thanh làm cùng vật liệu có mô đun đàn hồi E , ứng suất cho phép $[\sigma]$. Cho: $E = 2.10^4 \text{ KN/cm}^2$; $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$;

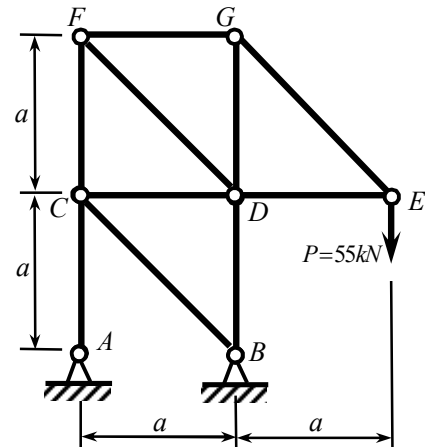
- Xác định tải trọng cho phép $[P]$ để các thanh đều thỏa mãn điều kiện bền.
- Với P tìm được, tính chuyển vị thẳng đứng của điểm đặt lực B .



Hình 9.1



Hình 9.2



Hình 9.3

9.2. Thanh gãy khúc ABC tuyệt đối cứng chịu liên kết gối di động tại B và được giằng bởi các thanh BD, CE như **hình 9.2**. Các thanh BD, CE làm cùng vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 21000 \text{KN/cm}^2$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 18 \text{kN/cm}^2$ và có diện tích mặt cắt ngang lần lượt là F và $2F$. Cho: $P = 200 \text{KN}$; $\left[\frac{\Delta L}{L} \right] \leq 3,6 \cdot 10^{-3}$.

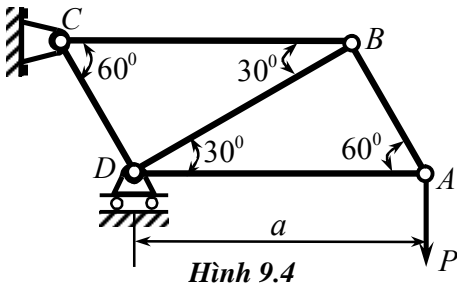
- Xác định ứng lực trong hai thanh BD, CE .
- Xác định diện tích mặt cắt ngang F theo điều kiện bền và điều kiện cứng.
- Tính chuyển vị thẳng đứng tại A .

9.3. Cho hệ dàn có kích thước và chịu lực như **hình 9.3**. Các thanh trong dàn làm cùng một loại vật liệu có mô đun đàn hồi E , ứng suất cho phép $[\sigma]$ và có cùng diện tích mặt cắt ngang là F . Cho: $[\sigma] = 21 \text{kN/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{kN/cm}^2$; $a = 2,5 \text{m}$

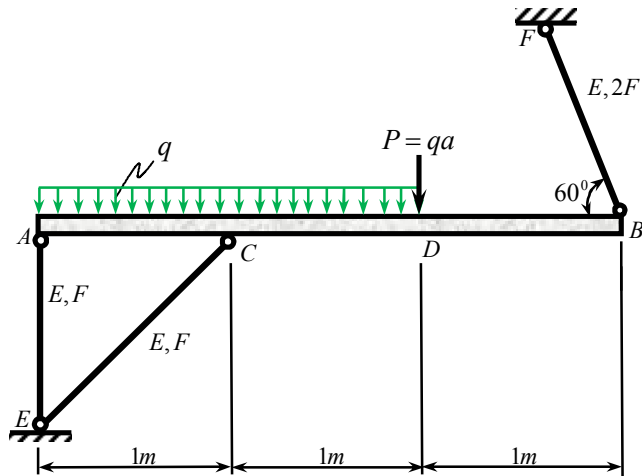
- Xác định ứng lực trong các thanh của hệ dàn.
- Xác định diện tích mặt cắt ngang, F , để các thanh trong dàn cùng bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng tại E

9.4. Cho hệ dàn có kích thước và chịu lực như **hình 9.4**. Các thanh trong dàn làm cùng một loại vật liệu có mô đun đàn hồi E , ứng suất cho phép $[\sigma]$ và có cùng diện tích mặt cắt ngang là F . Cho: $[\sigma] = 21 \text{kN/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{kN/cm}^2$; $a = 4 \text{m}$; $P = 450 \text{kN}$

- Xác định ứng lực trong các thanh của hệ dàn.
- Xác định diện tích mặt cắt ngang, F , để các thanh trong dàn cùng bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng tại A .



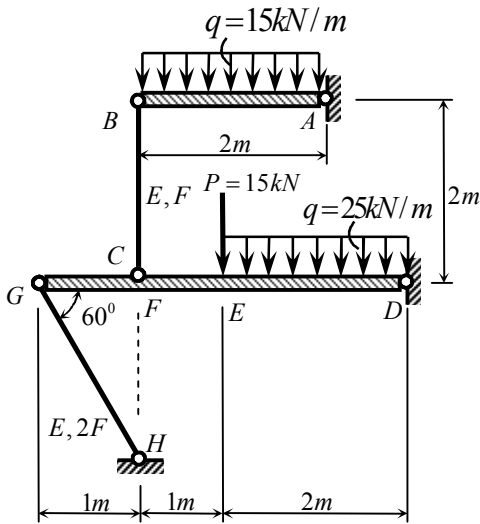
Hình 9.4



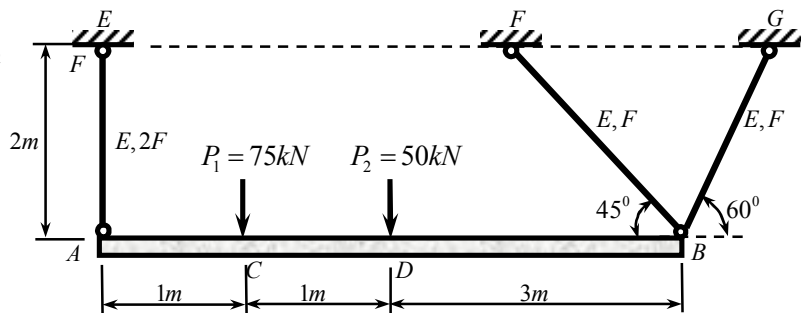
Hình 9.5

9.5. Thanh AB tuyệt đối cứng được giằng bởi các thanh AE , CE , BF như hình 9.5. Các thanh AE , CE , BF làm cùng vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 18,5 \text{ kN/cm}^2$ và có diện tích mặt cắt ngang lần lượt là F , F và $2F$.

- Xác định ứng lực trong các thanh AE , CE , BF .
- Xác định diện tích mặt cắt ngang F để các thanh AE , CE , BF đảm bảo điều kiện bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng tại D .



Hình 9.6



Hình 9.7

9.6. Các thanh AB , DG tuyệt đối cứng chịu liên kết khớp xoay tại A , D và được giữ bởi các thanh giằng BC , HG như hình 9.6. Các Thanh giằng BC , HG làm bằng vật liệu có mô đun đàn hồi E , ứng suất cho phép $[\sigma]$ và diện tích mặt cắt ngang lần lượt là F , $2F$.

Cho: $[\sigma] = 19 \text{ kN/cm}^2$; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $a = 1,2 \text{ m}$

- Xác định ứng lực trong các thanh BC , HG .

b) Xác định diện tích mặt cắt ngang, F , để các thanh BC, HG bền.

c) Với F tìm được, tính chuyển vị thẳng của điểm G và điểm B .

9.7. Thanh AB tuyệt đối cứng được giằng bởi các thanh AE, BF, BG như **hình 9.7**. Các thanh AE, BF, BG làm cùng vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 21000 \text{ KN/cm}^2$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 18,5 \text{ kN/cm}^2$ và có diện tích mặt cắt ngang lần lượt là $2F, F$ và F . Cho $\left[\frac{\Delta L}{L} \right] \leq 4,1 \cdot 10^{-3}$

d) Xác định ứng lực trong các thanh AE, BF, BG .

e) Xác định diện tích mặt cắt ngang F để các thanh AE, BF, BG đảm bảo điều kiện bền và điều kiện cứng.

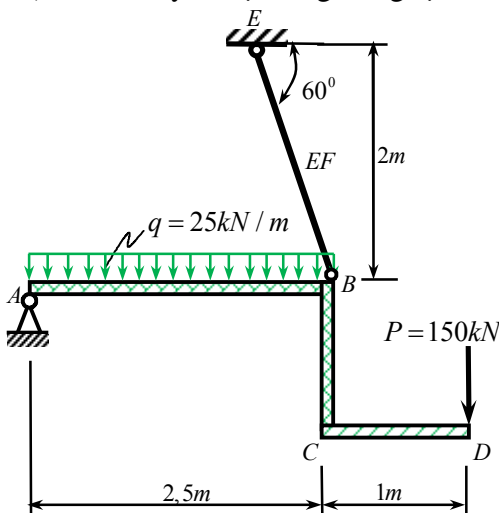
d) Tính chuyển vị thẳng đứng tại C .

9.8. Khung $ABCD$ tuyệt đối cứng chịu liên kết gối cố định tại A và được giằng bởi thanh BE như **hình 9.8**. Thanh BE làm bằng vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 21000 \text{ KN/cm}^2$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 19,5 \text{ kN/cm}^2$ và có diện tích mặt cắt ngang là F .

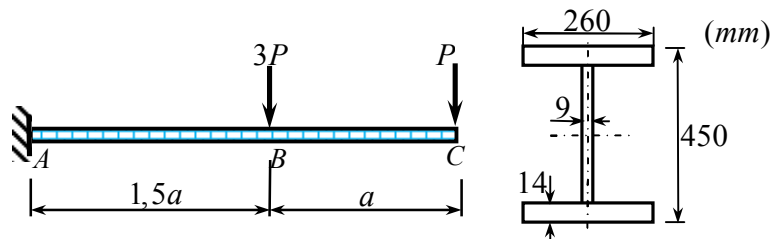
a) Xác định ứng lực trong thanh BE .

b) Xác định diện tích mặt cắt ngang F để thanh BE bền.

c) Tính chuyển vị thẳng đứng tại D .



Hình 9.8



Hình 9.9

9.9. Dầm thép AC có mặt cắt ngang chữ I , liên kết, chịu lực và kích thước như **hình 9.9**. Ứng suất cho phép của thép $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 19 \text{ kN/cm}^2$ và có mô đun đàn hồi $E = 21000 \text{ KN/cm}^2$.

Cho $a = 3 \text{ m}$.

a) Xác định phản lực liên kết tại ngàm A .

b) Vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn phát sinh trong dầm.

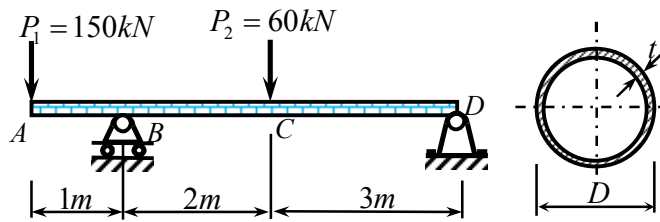
c) Xác định tải trọng cho phép $[P]$ theo điều kiện bền ứng suất pháp.

d) Với $[P]$ tìm được, kiểm tra bền cho dầm theo điều kiện bền ứng suất tiếp.

e) Tính chuyển vị thẳng đứng và chuyển vị xoay của mặt cắt tại C .

9.10. Dầm AD có mặt cắt ngang không đổi, liên kết, chịu lực và kích thước như **hình 9.10**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma] = 19,5 \text{ kN/cm}^2$, mô đun đàn hồi $E = 1,9 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Cho $t = 0,02D$

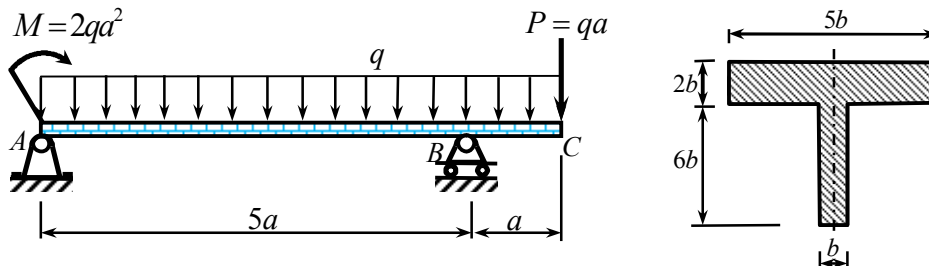
- Xác định phản lực liên kết tại các gối B, D .
- Vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn phát sinh trong dầm.
- Xác định kích thước mặt cắt ngang, D , của dầm theo điều kiện bền ứng suất pháp.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại A, C .
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A, D



Hình 9.10

9.11. Dầm AC có mặt cắt ngang hình chữ T , liên kết, chịu lực và kích thước như **hình 9.11**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép của thép $[\sigma] = 3,15 \text{ kN/cm}^2$, mô đun đàn hồi $E = 2700 \text{ kN/cm}^2$. Cho $q = 32 \text{ kN/m}$; $a = 1,2 \text{ m}$.

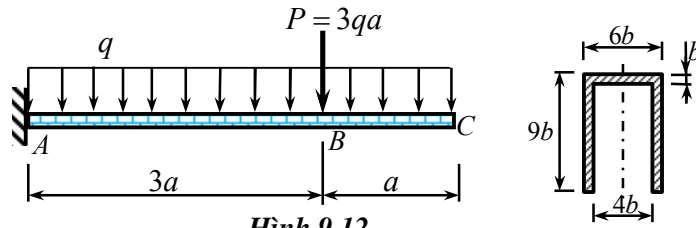
- Xác định phản lực liên kết tại A, B .
- Vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn phát sinh trong dầm.
- Xác định kích thước của mặt cắt ngang (b) của dầm theo điều kiện bền ứng suất pháp.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại C .
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A, C



Hình 9.11

9.12. Dầm AC mặt cắt ngang không đổi, liên kết, chịu lực và kích thước như **hình 9.12**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép của thép $[\sigma] = 3,5 \text{ kN/cm}^2$. Cho $a = 1,2 \text{ m}$; $q = 45 \text{ kN/m}$

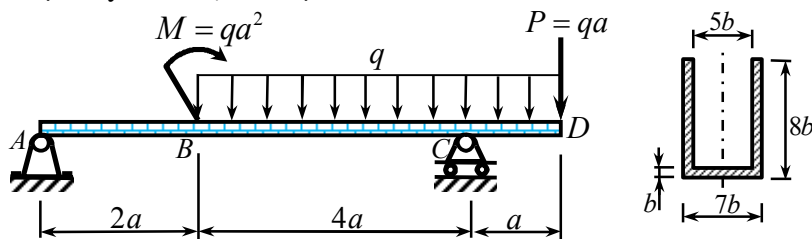
- Xác định phản lực liên kết tại A .
- Vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn phát sinh trong dầm.
- Xác định kích thước mặt cắt ngang của dầm, b , theo điều kiện bền ứng suất pháp.
- Tính chuyển vị thẳng đứng và chuyển vị xoay của mặt cắt tại C .



Hình 9.12

9.13. Dầm AD có mặt cắt ngang không đổi, liên kết, chịu lực và kích thước như **hình 9.13**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép của thép $[\sigma] = 17,5 \text{ kN/cm}^2$, mô đun đàn hồi $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Cho $b = 5 \text{ cm}$; $a = 1,2 \text{ m}$.

- Xác định phản lực liên kết tại A, C .
- Vẽ biểu đồ lực cắt, mômen uốn phát sinh trong dầm.
- Xác định tải trọng cho phép (q) theo điều kiện bền ứng suất pháp.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại B, D .
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A, D .

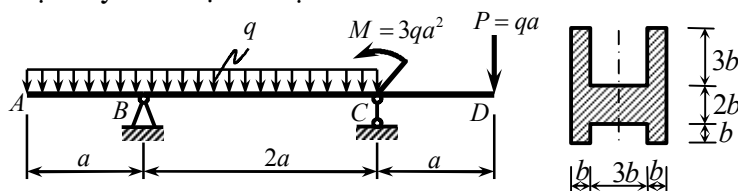


Hình 9.13

9.14. Cho dầm AD có mặt cắt ngang không đổi, liên kết, chịu lực và có kích thước như **hình 9.14**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma_k]$; $[\sigma_n]$, mô đun đàn hồi E

Cho: $[\sigma_k] = 1,5 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma_n] = 5,5 \text{ kN/cm}^2$; $E = 2700 \text{ kN/cm}^2$; $a = 1,5 \text{ m}$; $q = 400 \text{ kN/m}$

- Xác định phản lực liên kết tại B và C theo q, a .
- Vẽ biểu đồ nội lực Q_y , M_x phát sinh trong dầm.
- Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt, xác định kích thước mặt cắt ngang, b , theo điều kiện bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại A, D .
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A, D .

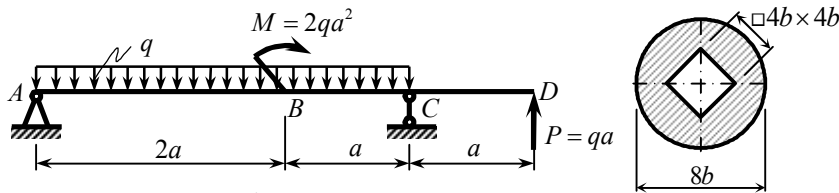


Hình 9.14

9.15. Cho dầm AD có mặt cắt ngang không đổi, chịu lực và có kích thước như **hình 9.15**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]$, mô đun đàn hồi E .

Cho: $[\sigma] = 19,5 \text{ kN/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $a = 1,5 \text{ m}$; $q = 450 \text{ kN/m}$

- Xác định phản lực liên kết tại A và C theo q, a .
- Viết biểu thức xác định các thành phần nội lực trong đoạn BC.
- Vẽ biểu đồ nội lực Q_y, M_x phát sinh trong dầm.
- Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt, xác định kích thước mặt cắt ngang, b , theo điều kiện bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại B, D.
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại A, D.

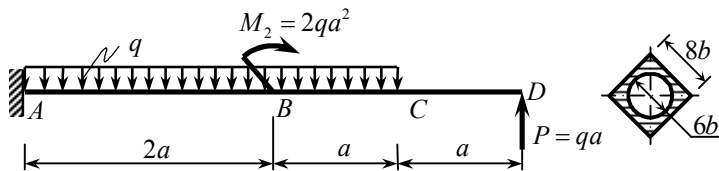


Hình 9.15

9.16. Cho dầm AD có mặt cắt ngang không đổi, chịu lực và có kích thước như **hình 9.16**. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]$, mô đun đàn hồi E .

Cho: $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $a = 2,5 \text{ m}$; $b = 5 \text{ cm}$

- Xác định phản lực liên kết tại A theo q, a .
- Viết biểu thức xác định các thành phần nội lực trong đoạn BC.
- Vẽ biểu đồ nội lực Q_y, M_x phát sinh trong dầm.
- Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt, xác định tải trọng cho phép, q , theo điều kiện bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng và chuyển vị xoay của mặt cắt tại B, C, D.



Hình 9.16

9.17. Cho dầm AC có mặt cắt ngang hình hộp, chịu liên kết gối cố định tại A và được giữ bởi thanh BD như **hình 9.17**. Thanh BD mặt cắt ngang hình tròn đường kính d . Dầm AC và thanh BD làm bằng thép có $[\sigma] = 19,5 \text{ kN/cm}^2$; $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$.

- Xác định phản lực liên kết tại A và ứng lực trong thanh BD.
- Vẽ biểu đồ nội lực Q_y, M_x, N_z phát sinh trong hệ.
- Bỏ qua ảnh hưởng lực cắt, xác định kích thước mặt cắt ngang, b , của dầm theo điều kiện bền.
- Xác định kích thước mặt cắt ngang, d , của thanh BD theo điều kiện bền.
- Tính chuyển vị thẳng đứng của mặt cắt tại B, C.
- Tính chuyển vị xoay của mặt cắt tại C.

