

Chapitre IV : Systèmes échantillonnés (discrets)

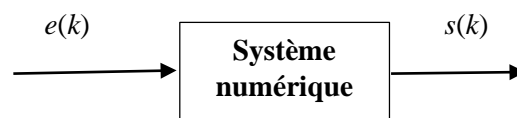
IV.1 Définitions

Un système à temps discret est un système où l'entrée et la sortie sont des signaux discrets. Les systèmes étudiés ici sont des systèmes linéaires. Il est donc bien important de comprendre les caractéristiques des systèmes linéaires.

Les systèmes linéaires discrets possèdent les mêmes caractéristiques que les systèmes linéaires continus.

IV.2 Représentation par les équations aux différences (équation de récurrence)

Considérons un système à temps discret, linéaire, causal et invariant. Ce système fournit en sortie un signal à temps discret $s(k)$ en réponse à un signal d'entrée à temps discret $e(k)$.



Un système numérique est défini par une équation de récurrence entre l'entrée $e(k)$ et la sortie $s(k)$

$$s_{k+n} + a_{n-1}s_{k+n-1} + \dots + a_1s_{k+1} + a_0s_k = b_0e_k + b_1e_{k+1} + \dots + b_me_{k+m} \quad (m \leq n)$$

Cette équation permet de calculer le terme $(k+n)$ si on connaît les autres termes.

IV.3 Opérateurs d'avance/retard

Retard : les retards se manifestent dans l'équation de récurrence par l'apparition des termes en $(k - \gamma)$; où γ est le retard en nombre de pas d'échantillonnage.

La transformée en z de ce retard est $z^{-\gamma}$

Avance : les avances se définissent par le terme $(k + \gamma)$

La transformée en z d'avance est $z^{+\gamma}$

Exemple

$$s(k + 3) + 3s(k + 2) + 2s(k + 1) + s(k) = e(k + 1) + e(k) + e(k - 1) + e(k - 2)$$

IV.4 Fonction de transfert discrète (Transmittance en Z)

Tout comme la transformée de Laplace permet de trouver la fonction de transfert d'un système, la transformée en z permet de trouver la fonction de transfert d'un système discret.

Pour un système discret, la fonction de transfert a la forme :

$$H(z) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

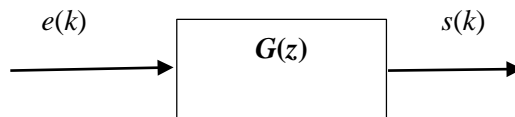
On peut aussi utiliser une autre forme pour représenter la fonction de transfert. Soit z_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, m$ les racines du numérateur, et p_k ; $k = 1, 2, 3, \dots, n$ les racines du dénominateur.

On peut exprimer la fonction de transfert selon :

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_k)}$$

Si on suppose que les facteurs communs aient été annulés, les racines du numérateur sont appelées les zéros et les racines du dénominateur sont appelés les pôles.

Le schéma fonctionnel du système du système numérique est :



L'ordre du système est le degré au dénominateur de la fonction de transfert.

Diagramme des pôles et zéros

On peut tracer les pôles et les zéros sur un graphique, les pôles étant représentés par des "x" et les zéros représentés par des cercles.

Réponse d'un système

On peut connaître la réponse d'un système à une entrée donnée en formant la transformée en Z inverse de $G(z) \times E(z)$

Exemple 1 : trouver la fonction de transfert de système défini par cette équation de récurrence suivante :

$$s(k + 3) + 3s(k + 2) + 2s(k + 1) + s(k) = e(k + 1) + e(k) + e(k - 1) + e(k - 2)$$

On applique la transformée en Z

$$z^3 s(z) + 3z^2 s(z) + 2zs(z) + s(z) = zE(z) + E(z) + z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z + 1 + z^{-1} + z^{-2}}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$$

Exemple 2

Soit un système défini par une équation de récurrence :

$$y(k + 1) = 0.5 y(k) + e(k)$$

L'entrée est un échelon unitaire avec $y(0) = 0$

Trouver la sortie $y(k)$.

Solution

La transformée en Z du système :

$$zY(z) - 0.5 Y(z) = E(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z - 0.5} E(z)$$

Si l'entrée est un échelon unitaire alors $E(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 0.5)} \frac{z}{z - 1}$$

En décomposant en éléments simples :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{2}{z - 1} - \frac{2}{z - 0.5}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z - 1} - \frac{2z}{z - 0.5}$$

$$y(k) = 2 - 2(0.5)^k$$

Le gain statique

K est défini par :

$$K = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} s_k}{\lim_{k \rightarrow \infty} e_k}$$

Théorème des valeurs finales donne :

$$K = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

$$K = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$K = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_n}{1 + a_{n-1} + \dots + a_0}$$

$$K = \frac{\sum_{j=0}^m b_j}{1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i}$$

IV.5 Représentation dans l'espace d'état

Dans une représentation en temps discret, la possibilité d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée et en fonction de son passé.

La représentation d'état d'un système discret mono-entrée et mono-sortie prend la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A] x(k) + (B)e(k) \\ y(k) = [C] x(k) \end{cases}$$

[A] est une matrice carrée.

(B) est un vecteur colonne.

(C) est un vecteur ligne.

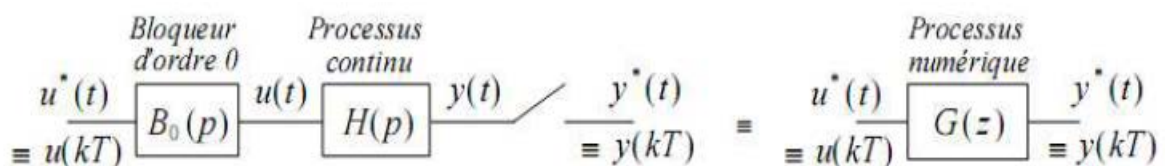
Exemple :

Considérons un système régi par les équations :

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e(k) \\ y(k) = (0 \quad 4) x(k) \end{cases}$$

IV.6 Fonction de transfert numérique d'un processus analogique muni d'un Bloqueur d'Ordre Zéro :

Un processus numérique $G(z)$ issu de la numérisation d'un processus continu $G(p)$ s'obtient par synthèse par invariance indicielle :



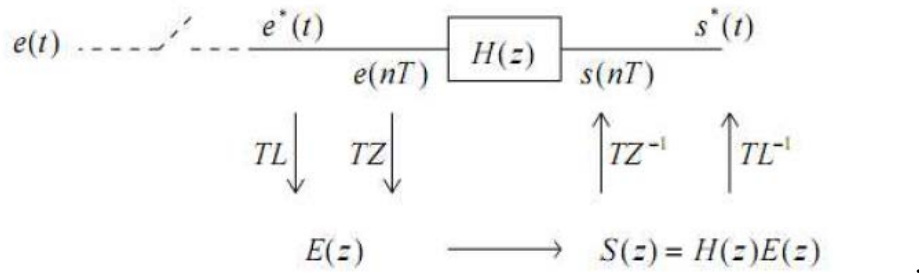
Avec :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} TZ\left(\frac{H(p)}{p}\right)$$

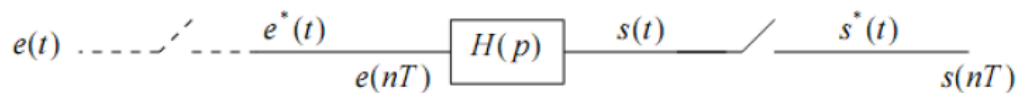
IV.7 Structures générales de l'asservissement

IV.7.1 Systèmes et asservissements échantillonnés (fonctions de transfert).

Dés que l'on a au moins un échantillonneur dans un système, on utilise la transformée en z comme relation d'entrée-sortie fréquentielle.

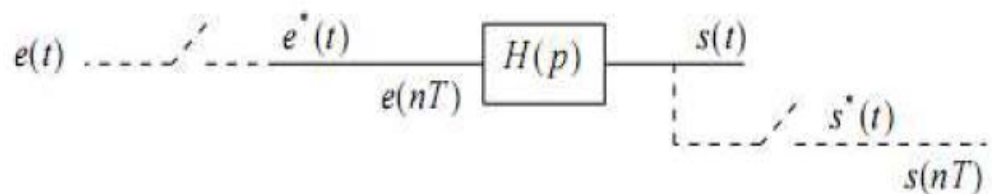


Ou :



$$S(p) = H(p)E^*(p) \xrightarrow{\text{reconstruction}} S^*(p) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) \rightarrow S(z) = H(z)E(z)$$

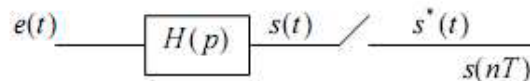
Entrée numérique (échantillonnée)-sortie analogique.



$$s(t) = TL^{-1}[S(p)] = TL^{-1}[H(p)E^*(p)] \text{ d'où: } s^*(t) \xrightarrow{TL} S^*(p) = S(z) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) = H(z)E(z)$$

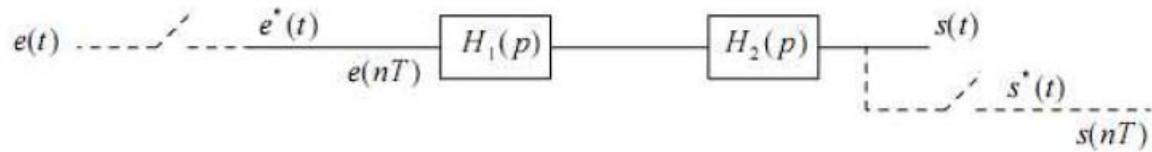
$$S(p) = H(p)E^*(p) \xrightarrow{\text{reconstruction}} S^*(p) = H^*(p)E^*(p) \leftrightarrow S(z) = H(z)E(z) \text{ avec: } H(z) = Z[H(p)]$$

Entrée analogique -sortie numérique.

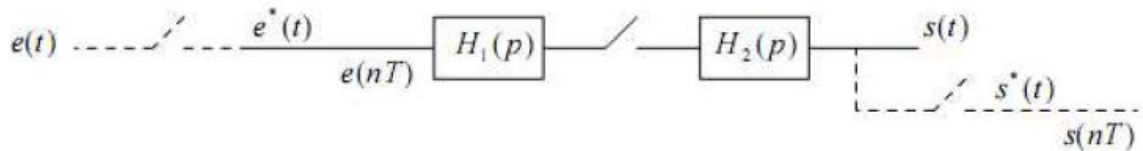


$$S(p) = H(p)E(p) \xrightarrow{\text{reconstruction}} S^*(p) = \overline{HE}^*(p) \text{ (noté aussi } \overline{H(p)E(p)}^* \text{)} \leftrightarrow S(z) = \overline{EH}(z) \text{ avec: } \overline{EH}(z) = Z[\overline{EH}(p)]$$

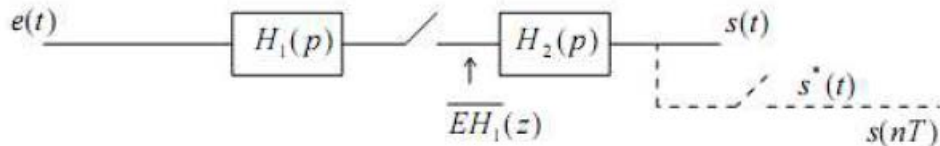
Schémas blocs en cascade



$$s^*(t) \xrightarrow{\mathcal{T}_L} S(z) = E(z) \overline{H_1 H_2}(z) \quad \text{avec :} \quad \overline{H_1 H_2}(z) = Z[H_1(p)H_2(p)]$$



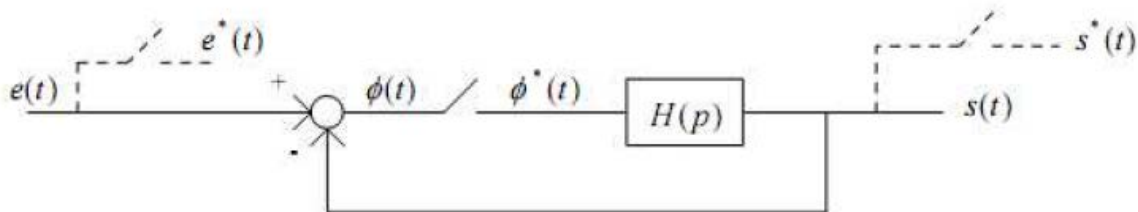
$$s^*(t) \xrightarrow{\mathcal{T}_L} S(z) = E(z) H_1(z) H_2(z) \quad \text{avec :} \quad H_1(z) H_2(z) = Z[H_1(p)] \cdot Z[H_2(p)]$$



$$s^*(t) \xrightarrow{\mathcal{T}_L} S(z) = \overline{EH_1}(z) H_2(z) \quad \text{avec :} \quad \overline{EH_1}(z) = Z[E(p)H_1(p)]$$

Asservissements échantillonnés

1.



$$S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) \leftrightarrow S(z) = H(z)\Phi(z) \quad \text{avec :} \quad H(z) = Z[H(p)]$$

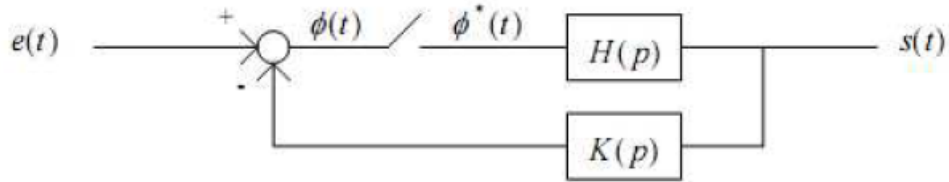
$$\text{car :} \quad [\Phi^*(p)]^* = \Phi^*(p) : \quad (\text{rééchantillonnage synchrone d'un signal échantillonné : } \phi^*(t) = \phi^{**}(t))$$

$$\Phi(p) = E(p) - S(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - S^*(p) \quad (\text{l'échantillonnage est un opérateur linéaire})$$

$$\Phi^*(p) = E^*(p) - H^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow \Phi(z) = E(z) - H(z)\Phi(z) \rightarrow \Phi(z) = \frac{E(z)}{1 + H(z)}$$

2.

$$S(z) = H(z)\Phi(z) = H(z)\frac{E(z)}{1+H(z)} \rightarrow \text{FTBF: } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)}}$$



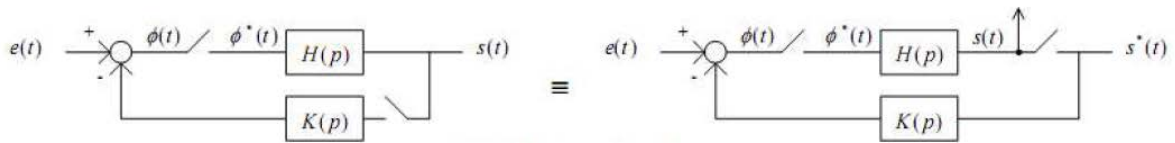
$$\Phi(p) = E(p) - K(p)S(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)S(p)} \quad \text{or} \quad S(p) = H(p)\Phi^*(p)$$

$$\rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - \overline{K(p)H(p)\Phi^*(p)} = E^*(p) - \overline{KH}^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow \Phi^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH}^*(p)}$$

$$S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) = H^*(p)\frac{E^*(p)}{1 + \overline{KH}^*(p)} \leftrightarrow S(z) = H(z)\frac{E(z)}{1 + \overline{KH}(z)}$$

$$\text{FTBF: } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + \overline{KH}(z)}} \quad \text{avec: } \overline{KH}(z) = Z[K(p)H(p)]$$

3.

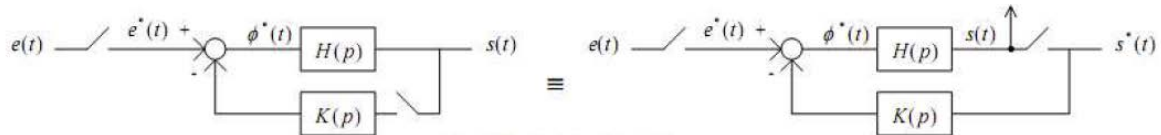


$$\Phi(p) = E(p) - K(p)S^*(p) \rightarrow \Phi^*(p) = E^*(p) - K^*(p)S^*(p) \quad \text{or} \quad S(p) = H(p)\Phi^*(p) \rightarrow S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p)$$

$$\rightarrow S^*(p) = H^*(p)[E^*(p) - K^*(p)S^*(p)] \rightarrow S(z) = H(z)[E(z) - K(z)S(z)]$$

$$\text{FTBF: } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}} \quad \text{avec: } H(z) = Z[H(p)] \quad \text{et} \quad K(z) = Z[K(p)]$$

4.



$$\Phi^*(p) = E^*(p) - K(z)S^*(p) \rightarrow \Phi(z) = E(z) - K(z)S(z)$$

$$S^*(p) = H^*(p)\Phi^*(p) \rightarrow S(z) = H(z)\Phi(z) = H(z)[E(z) - K(z)S(z)]$$

$$\text{FTBF: } \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}} \quad \text{avec: } H(z) = Z[H(p)] \quad \text{et} \quad K(z) = Z[K(p)]$$