

المراجعة النهائية في الهندسة الفراغية

الرياضيات الصف الثالث الثانوي

٢٠٢٣ - ٢٠٢٤



مراجعة الهندسة الفراغية

1

إذا كان النقطة (ك ، ٣ ، - ٢) تقع على بعدين متساويين من المحورين س ، ص فإن ك =

$$١ \pm ٢$$

$$٢ \pm ٣$$

$$٣ \pm ٤$$

$$٤ \pm ٥$$

الحل : ∴ البعد عن محور س = البعد عن محور ص

بالتربيع

$$\sqrt{٤ + ك^٢} = \sqrt{٤ + ٩}$$

$$٤ + ك^٢ = ٤ + ٩$$

$$ك^٢ = ٩ \quad ك = \pm ٣$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية



② إذا كان بعد النقطة $(-4, 3, 4)$ عن محور س يساوي ١ وعن المستوى ص ع يساوي ٥ فإن $٥ = ١ + ٥ =$

الحل

$$\therefore \text{البعد عن محور س} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\therefore 5 = 1$$

$$\therefore \text{البعد عن المسنوعة ص ع} = |-4| = 4$$

$$\therefore 9 = ٥ + ١$$

$$\therefore 4 = ٥$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{1} \\ \hline \textcircled{2} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1- \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 9- \\ \textcircled{4} \end{array}$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

3

إذا كانت $M(4, 6, 2)$ ، $B(10, 2, 2)$ ،
و كان منتصف \overline{MB} \Rightarrow لمحور س فإن $2K + M = \dots\dots\dots$

الحل

منتصف \overline{MB} هو $(\frac{4+10}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{2+2}{2})$

\therefore هذه النقطة تقع على محور س

$$\therefore K + 6 + 2 = 0 \quad (1)$$

$$K - 10 + 2 = 0 \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) ، (2) نجد أن $K = 8$ ، $M = 2$

$$\therefore 2K + M = 14$$

أ / رفعت حمزة



٨ (١)

٨ - (٢)

٦ (٣)

١٤ - (٤)

مراجعة الهندسة الفراغية

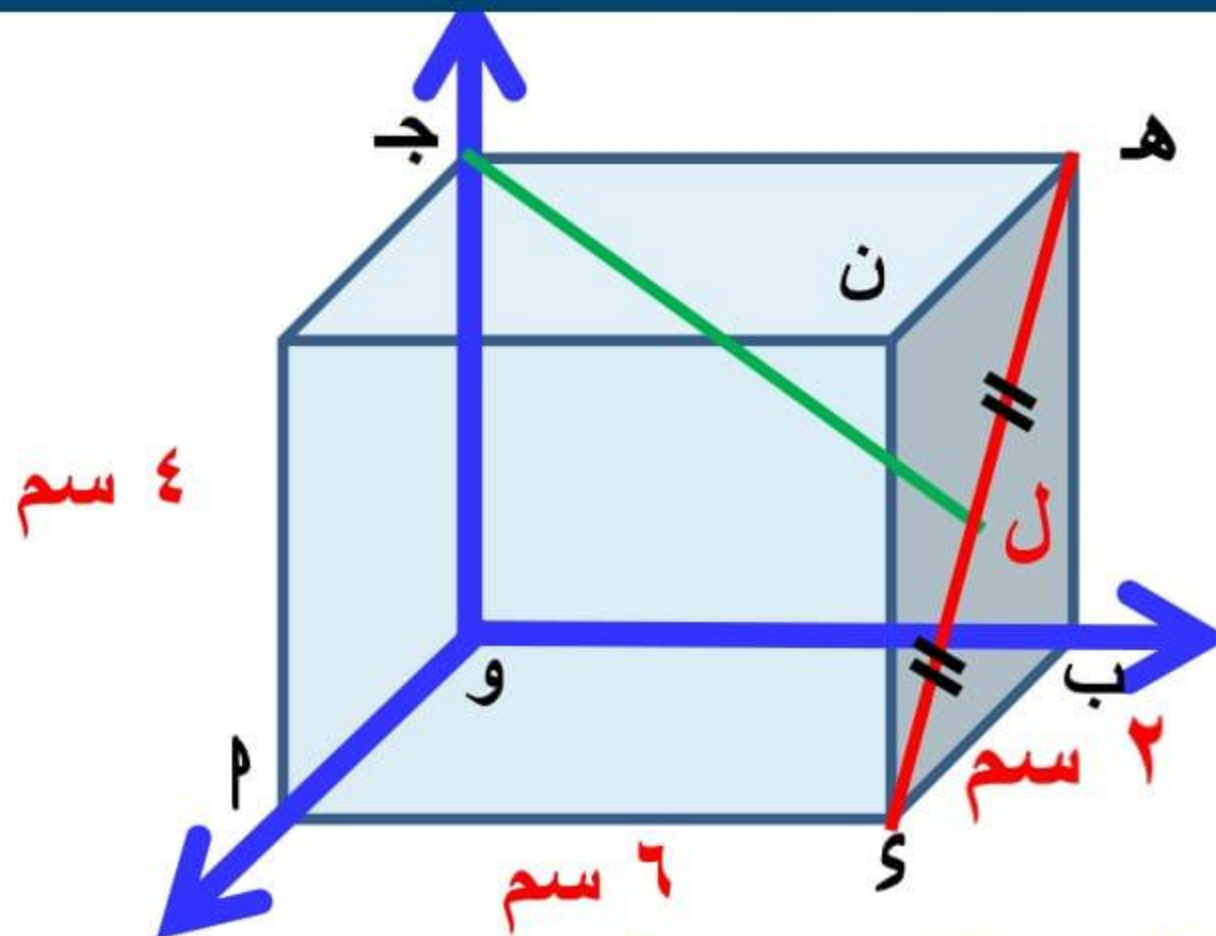


١ $\sqrt[3]{5}$

٢ $\sqrt[4]{1}$

٣ $\sqrt[8]{5}$

٤ $\sqrt[9]{1}$



④ : الشكل المقابل : إذا كان \vec{l} منتصف \vec{h}

ء فإن طول $\vec{j} \cdot \vec{l} = \dots$ وحدة طول

الحل

احداثيات $\vec{j} = (4, 0, 0)$

احداثيات $\vec{h} = (4, 6, 0)$ احداثيات $\vec{e} = (0, 6, 2)$

احداثيات \vec{l} منتصف \vec{h} $\vec{e} = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2, 6, 1)$

$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{(2-4)^2 + (6-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt[4]{4 + 36 + 1} = \sqrt[4]{41}$ وحدة طول

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

5

القيم الممكنة للعدد n التي تجعل المسافة بين النقطتين $A(2, 4, 4)$ و $B(3, n, 2)$ تساوي $\sqrt{62}$ هي

الحل

$$\sqrt{62} = \sqrt{(2-3)^2 + (4-n)^2 + (4+2)^2} \quad \text{ب } A$$

بالتربيع

$$62 = (4-n)^2 + 37$$

$$25 = (4-n)^2 \quad \therefore \quad 62 = (4-n)^2 + 37$$

$$5 = 4 - n \quad \text{أو} \quad 5 = 4 - n \quad \therefore$$

$$n = 1 \quad \text{أو} \quad n = 9 \quad \therefore$$

• - 1 أو 9 ✓

• 1 أو - 9

• - 5 أو - 9

• 1 أو 5

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

6

إذا كانت $P(3, -4, 0)$ ، $B(15, 0, 2)$ ، $C(0, -8, 4)$ ثلاث نقاط في الفراغ

وهي رؤوس المثلث P B C فإن بعد المركز الهندسي للمثلث عن المستوى الإحداثي S يكون

الحل

• أكبر من بعده عن المستوى S ص ✓

المركز الهندسي للمثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته

• أكبر من بعده عن المستوى S ع

$$M = \left(\frac{4 + 2 + 0}{3}, \frac{-8 + 0 + 4}{3}, \frac{0 + 15 + 3}{3} \right)$$

• أصغر من أو يساوي بعده عن المستوى S ص

$$M = (2, -4, 6)$$

• أكبر من أو يساوي بعده عن المستوى S ع

بعدها عن المستوى S ع $= |-4| = 4$ وحدات طول

بعدها عن المستوى S ع $= 6$ وحدات طول

بعدها عن المستوى S ص $= 2$ وحدة طول

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

7

معادلة معادلة الكرة التي مركزها (٢ ، - ٣ ، ١) و طول نصف قطرها

٧ سم هي

$$\textcircled{1} \quad ٤٩ = \sqrt{(١ + ع)^2} + \sqrt{(٣ + ص)^2} + \sqrt{(٢ + س)^2}$$

$$\textcircled{2} \quad ٧ = \sqrt{(١ - ع)^2} + \sqrt{(٣ + ص)^2} + \sqrt{(٢ - س)^2}$$

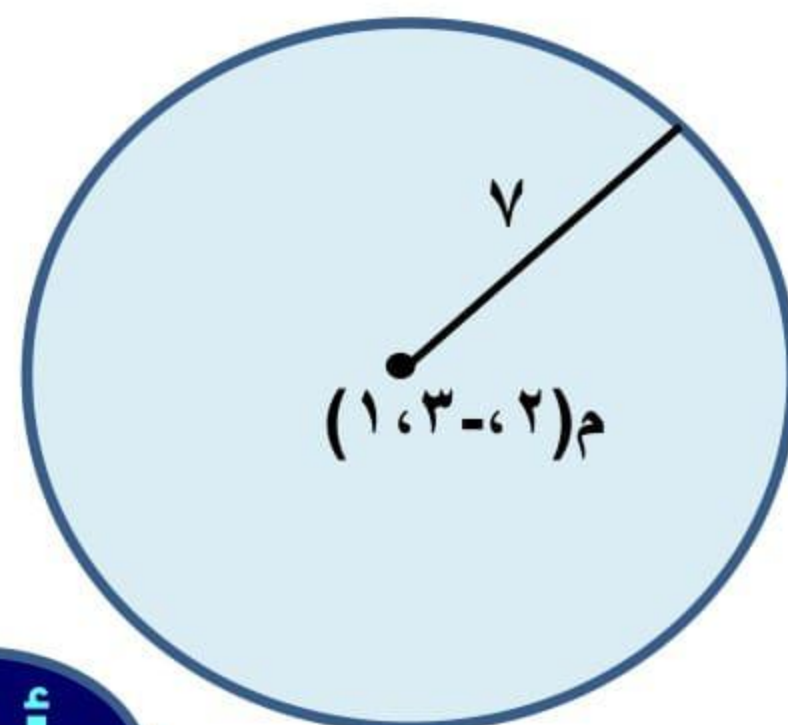
$$\textcircled{3} \quad ٤٩ = \sqrt{(١ - ع)^2} + \sqrt{(٣ + ص)^2} + \sqrt{(٢ - س)^2}$$

$$\textcircled{4} \quad \overline{٧} = \sqrt{(١ + ع)^2} + \sqrt{(٣ - ص)^2} + \sqrt{(٢ + س)^2}$$

الحل

الصورة القياسية هي :

$$٤٩ = \sqrt{(١ - ع)^2} + \sqrt{(٣ + ص)^2} + \sqrt{(٢ - س)^2}$$



أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

8

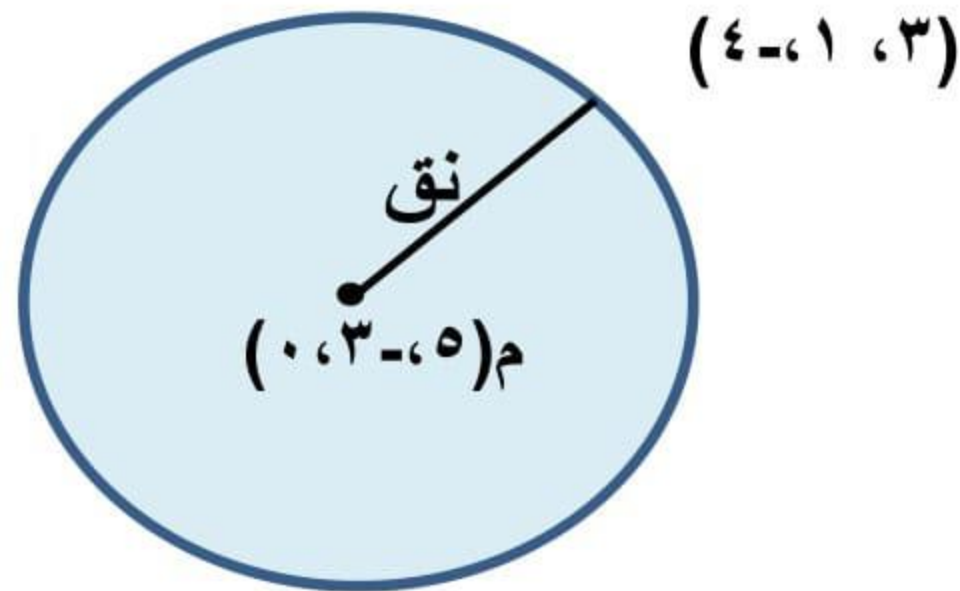
معادلة الكرة التي مركزها (٥ ، - ٣ ، ٠) وتمر بالنقطة (٣ ، ١ ، - ٤) هي

$$\textcircled{1} \quad ٣٦ = (٣ - ٥)^2 + (١ - (-٣))^2 + (-٤ - ٠)^2$$

$$\textcircled{2} \quad ٣٦ = (٥ - ٣)^2 + (٣ + ١)^2 + (-٠ - ٤)^2$$

$$\textcircled{3} \quad ٣٦ = ٤ + ١٦ + ١٦$$

$$\textcircled{4} \quad ٦ = (٥ - ٣)^2 + (٣ + ١)^2 + (-٠ - ٤)^2$$



الحل

$$٦ = \sqrt{(٤ + ٠)^2 + (١ - ٣)^2 + (٣ - ٥)^2}$$

معادلة الكرة هي : $٣٦ = (٥ - ٣)^2 + (٣ + ١)^2 + (-٠ - ٤)^2$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

9

معادلة الكرة التي \overline{AB} قطر فيها حيث $M(1, 6, 3)$ ، $B(5, -2, 7)$ هي

$$① \quad 24 = 2(5 + ع) + 2(1 + ص) + 2(3 + س)$$

$$② \quad 2\sqrt{2} = 2(5 - ع) + 2(2 - ص) + 2(3 - س)$$

$$③ \quad 2\sqrt{4} = ع 10 - ص 4 - س 6 - 2ع + 2ص + 2س$$

$$④ \quad \checkmark \quad 24 = 2(5 - ع) + 2(2 - ص) + 2(3 - س)$$

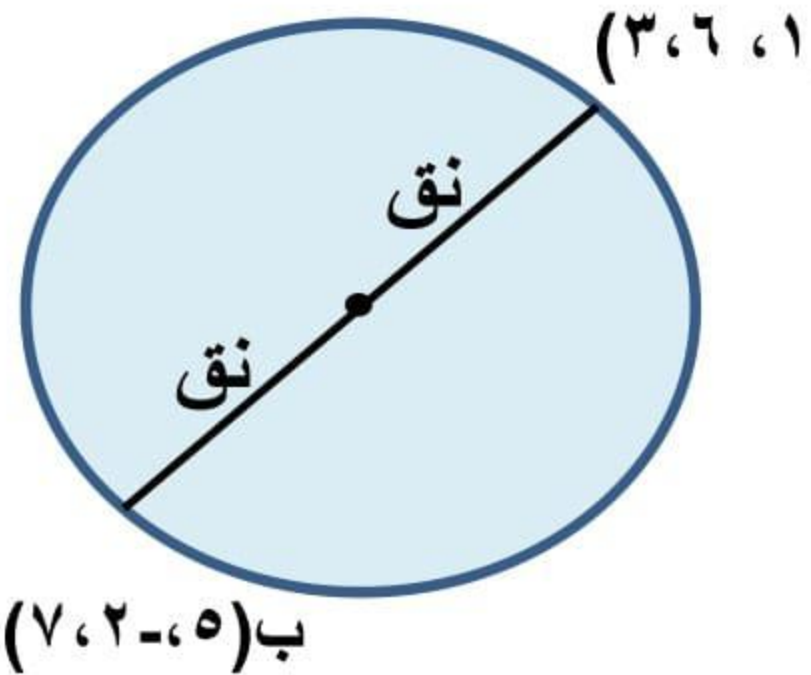
الحل

$$احداثيات م = (\frac{7+3}{2} , \frac{2-6}{2} , \frac{5+1}{2}) = (5, -2, 3)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2(7-3) + 2(2+6) + 2(5-1)} \quad \therefore \overline{AB} = 2\sqrt{2} \quad \therefore \text{نق} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{معادلة الكرة هي : } 24 = 2(5 - ع) + 2(2 - ص) + 2(3 - س)$$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

10

معادلة الكرة التي مركزها (٥ ، ١ ، ٤) وتمس المستوى ص ع هي

$$\textcircled{1} \quad ١٦ = ٢(٤ - ع) + ٢(١ - ص) + ٢(٥ + س)$$

$$\textcircled{2} \quad ٥ = ٢(٤ - ع) + ٢(١ - ص) + ٢(٥ + س)$$

$$\textcircled{3} \quad ٠ = ٢٥ + ٢(٤ - ع) + ٢(١ - ص) + ٢(٥ + س)$$

$$\textcircled{4} \quad \checkmark ٢٥ = ٢(٤ - ع) + ٢(١ - ص) + ٢(٥ + س)$$

الحل

∴ الكرة تلمس المستوى ص ع

$$\therefore \text{نق} = |٥ - ٥| = ٥$$

$$\text{معادلة الكرة هي : } ٢٥ = ٢(٤ - ع) + ٢(١ - ص) + ٢(٥ + س)$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

11

معادلة الكرة التي طول قطرها ٨ سم و تمس المستويات الثلاثة واحداثيات المركز موجبة هي

$$① \quad ٦٤ = ٢(٨ - ع) + ٢(٨ - ص) + ٢(٨ - س)$$

$$② \quad ١٦ = ٢(٤ + ع) + ٢(٤ + ص) + ٢(٤ + س)$$

$$③ \quad ٠ = ١٦ - ٢(٤ - ع) + ٢(٤ - ص) + ٢(٤ - س) \quad \checkmark$$

$$④ \quad ٨ = ٢(٤ - ع) + ٢(٤ - ص) + ٢(٤ - س)$$

الحل

∴ الكرة تمس المستويات الثلاثة

طول نصف قطرها ٤ سم

∴ احداثيات المركز هي م

$$(٤, ٤, ٤) =$$

$$١٦ = ٢(٤ - ع) + ٢(٤ - ص) + ٢(٤ - س) \quad \text{معادلة الكرة هي :}$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

12

معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٦ سم و تماس المحاور الثلاثة الموجبة هي

$$① \quad ٣٦ = ٢(٦ - ع) + ٢(٦ - ص) + ٢(٦ - س)$$

$$② \quad ٣٦ = ٢(٦\sqrt{٣} - ع) + ٢(٦\sqrt{٣} - ص) + ٢(٦\sqrt{٣} - س) \quad \checkmark$$

$$③ \quad ٣٦ = ٢(٦\sqrt{٣} + ع) + ٢(٦\sqrt{٣} + ص) + ٢(٦\sqrt{٣} + س)$$

$$④ \quad ٦ = ٢(٦\sqrt{٣} - ع) + ٢(٦\sqrt{٣} - ص) + ٢(٦\sqrt{٣} - س)$$

، طول نصف قطرها ٦ سم

∴ الكرة تماس المحاور الثلاثة الموجبة

الحل

∴ إحداثيات المركز هي م $(٦\sqrt{٣}, ٦\sqrt{٣}, ٦\sqrt{٣}) =$

$$٣٦ = ٢(٦\sqrt{٣} - ع) + ٢(٦\sqrt{٣} - ص) + ٢(٦\sqrt{٣} - س)$$

معادلة الكرة هي :

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

13

طول قطر الكرة : $s^2 + s^2 + s^2 = e^2 - 8v + e^2 = 0$ يساوي

(٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢)

الحل

ج = ٧ -

احداثيات المركز هي م = (٣ ، ٤ ، ٢)

∴ طول القطر = ١٢

$\sqrt{36} = 6$

نق = $\sqrt{9 + 16 + 4 + 7}$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

14

نقطة تقاطع الكرة : (س - ١) + (ص + ٢) + (ع - ٥) = ٣٨ مع محور س الموجب هي

الحل

لإيجاد التقاطع مع محور س نضع ص = ٠ ، ع = ٠

- (٠ ، ٠ ، ٣)
- (٠ ، ٠ ، ٤) ✓
- (٠ ، ٠ ، ٢)
- (٠ ، ٠ ، ٥)

$$\therefore (س - ١) + ٤ + ٢٥ = ٣٨ \quad \therefore (س - ١) = ٩$$

$$\therefore س - ١ = \pm ٣ \quad \text{و مناسب} = ٤ \quad \text{أو س} = - ٢$$

∴ الكرة تقطع محور س الموجب في النقطة (٠ ، ٠ ، ٤)

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

15

كرة معادلتها هي
 $s^2 + v^2 + e^2 + 6s + (2k - 8)s - k v - v^2 + e^2 + \frac{5}{4}k = 0$
 يكون حجمها = $\pi \dots \dots$ وحدة مكعبة (٢٤ ، ٣٦ ، ٤٢ ، ٦٠)

الحل

∴ المعادلة تمثل معادلة كرة

$$\therefore k = 4$$

$$2k - 8 = 0$$

∴ المعادلة هي : $s^2 + v^2 + e^2 + 6s - 4v - v^2 + e^2 + 5 = 0$

$$j = 5$$

$$m = (-3, 2, 1)$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r = \sqrt{9 + 4 + 1} = 3$$

أ / رفعت حمزة

$$\therefore \text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi (3)^3 = \pi 36 \text{ وحدة مكعبة}$$

مراجعة الهندسة الفراغية

16

الكرتان : (س - ٥) + ٢(ص + ٢) + ٢ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع - ٢س - ٢ص + ٢ع - ١ = ٠ ،
يكونان =

الحل

$$١م = (٥ ، -٢ ، ٠) ، نق١ = ٢$$

$$٢م = (١ ، ١ ، -١) ، ج = -١$$

$$\therefore نق٢ = \sqrt{١ + ١ + ١ + ١} = ٢$$

$$١م ، ٥ = \sqrt{٢(١ + ٠) + ٢(١ - ٢ -) + ٢(١ - ٥)} = ٢م$$

$$\therefore ١م ، ٢م < نق١ + نق٢$$

الكرتان متباعدتان

أ / رفعت حمزة

متماسكان من الخارج

متماسكان من الداخل

متباعدتان ✓

متقاطعتين

مراجعة الهندسة الفراغية

17

الكرتان : (س - ٥) + (ص + ٥) + (ع - ٤) = ك
 ، س + ص + ع + ٦ - س - ٢ - ص - ٨ + ع = ١٧ متماستان من الخارج
 فإن ك = (٦ ، ٧ ، ٣٦ ، ٤٩)

الحل

نق_١ = ك

م_١ = (٥ ، - ٥ ، ٤)

ج = ١٧

م_٢ = (- ٣ ، ١ ، ٤)

∴ نق_٢ = √(٩ + ١ - ١٦ + ١٧) = ٣

م_١ م_٢ = √((٤ - ٤) + (١ - ٥) + (٣ + ٥)) = ١٠

∴ م_١ م_٢ = نق_١ + نق_٢ ∴ ١٠ = نق_١ + ٣

∴ نق_١ = ٧ ∴ ك = ٤٩



مراجعة الهندسة الفراغية

18

إذا كانت : $s^2 + v^2 + e^2 + s - 6v + 4e + k = 0$
تمثل معادلة كرة فإن $k \geq 0$

الحل

المركز م (- ١ ، ٣ ، ٢) ، ج = ك

$$\therefore \text{نق} = \sqrt{1 + 9 + 4 - k} \quad \therefore \text{نق} = \sqrt{14 - k}$$

لكي تكون معادلة كرة يجب ان يكون $14 - k > 0$

ومنها $k > 14$ $\therefore k \in [-\infty, 14]$

$$[14, \infty]$$

$$[-14, \infty]$$

$$[-14, \infty]$$

$$[-14, \infty]$$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

19 إذا كانت المعادلة الإحداثية لكرة هي: $(س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

فإن معادلتها الاحداثية بعد انتقال مقداره أربع وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ هي

الحل

(أ) $٩ = (س + ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢$ ✓

∴ مركز الكرة المعلومة (٢- ، ١ ، ٣)
(ب) $٤٩ = (س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢$

∴ مركز الكرة المطلوبة (٢- ، ٣- ، ٣)
(ج) $٩ = (س - ٤)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٣)^٢$
∴ المعادلة هي

(د) $٤٩ = (س + ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ + (ع - ٣)^٢$
 $٩ = (س + ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

20 إذا كان $\vec{p} = (-2, 1, 2)$ فإن جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه \vec{p} هي

الحل

(أ) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$ ✓

(ب) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

(ج) $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$

(د) $(2, 1, 0)$

$$3 = \sqrt{4 + 1 + 4} = \|\vec{p}\|$$

$$\frac{(-2, 1, 2)}{3} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \vec{u}_p$$

∴ جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه \vec{p} هي

$$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

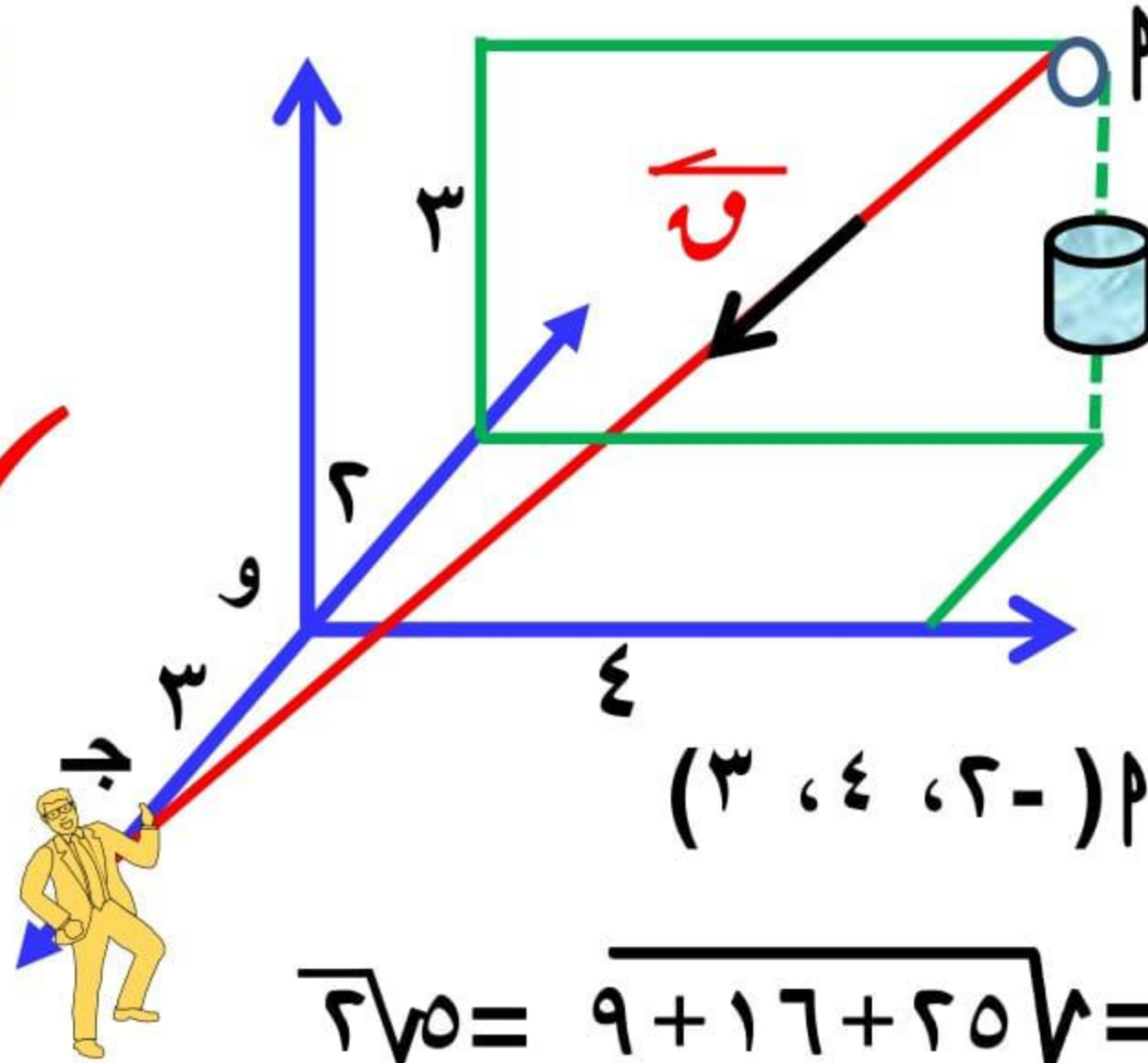
أ / رفعت حمزة

21

في الشكل المقابل: إذا كان

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{10} \text{ أوجد } \vec{v}$$

الحل /



احداثيات ج (٣ ، ٤ ، -٢) ، احداثيات م (٣ ، ٤ ، -٢)

$$\vec{m} - \vec{j} = \vec{p} = (-2, 4, 3) \quad \|\vec{m} - \vec{j}\| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{\vec{m} - \vec{j}}{\|\vec{m} - \vec{j}\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}} \right)$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \vec{v} = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}} \right) = (-2, 4, 3)$$

- ١ (-١٠ ، ٨ ، ٦)
- ٢ (١٠ ، -٨ ، -٦) ✓
- ٣ (-١٠ ، ٨ ، -٦)
- ٤ (١٠ ، -٦ ، -٨)



مراجعة الهندسة الفراغية

22 إذا كان المتجه $\vec{M} (2, 4, k)$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور ص زاوية قياسها 45° فإن $k = \dots\dots\dots$

($\sqrt{2} \pm$, $\sqrt{2} \pm$, $2 \pm$, $0 \pm$)

الحل /

$$\sqrt{2k + 20} = \sqrt{2k + 16 + 4} = \|\vec{M}\| \therefore$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{2k + 20}} \quad \therefore \cos 45 = \frac{4}{\sqrt{2k + 20}}$$

$$\therefore \frac{4}{\sqrt{2k + 20}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \sqrt{2k + 20} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore 2k + 20 = 32 \quad \therefore 2k = 12 \quad \therefore k = \pm\sqrt{2}$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

23

إذا كان $(\theta_s, \theta_v, \theta_e)$ هي زوايا الاتجاه لمتجه ما

فإن $\cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_v + \cos^2 \theta_e = \dots$ (- ١) ، ١ ، ٢ ، ٣

الحل /

تذكر أن

$$\cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta_v$$

$$\text{المقدار} = \cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_v + \cos^2 \theta_e$$

$$= \cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_v + 1 - \cos^2 \theta_v = 1 + \cos^2 \theta_s$$

$$= 1 + \cos^2 \theta_s = 1 + 1 = 2$$

$$= 2 - 1 = 1$$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

24

مجموع قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{p} = (2, -2, \sqrt{2})$ تساوي
 (١٨٥ ، ٢٤٠ ، ٢٢٥ ، ١٨٠)

الحل /

$$\epsilon = \sqrt{2 + 4 + 2} = \|\vec{p}\|$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \frac{(2, -2, \sqrt{2})}{\epsilon} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

∴ جيوب تمام الاتجاه هي $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

$$-\frac{1}{2} = \cos \theta$$

$$\therefore \theta = 120^\circ$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

25

إذا كان \vec{a} ، \vec{b} متجهي وحدة فإن $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$...

الحل

- 1 ☐ $[0, 1]$
- 2 ☐ $[-1, 1]$
- 3 ☒ $[-1, 1]$
- 4 ☐ $+ \infty$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 1 \times 1 \times \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow [-1, 1]$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

26

إذا كانت \vec{a} ، \vec{b} متجهي وحدة متعامدين

فإن قيمة $(\vec{a}^3 + \vec{b})^2 = \dots\dots\dots$

الحل

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{المقدار} = (\vec{a}^3 + \vec{b}) \cdot (\vec{a}^3 + \vec{b})$$

$$= \|\vec{a}\|^6 + \vec{a}^3 \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}^3 + \|\vec{b}\|^2$$

$$= \|\vec{a}\|^6 + \vec{a}^3 \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}^3 + \|\vec{b}\|^2$$

$$= 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

٩

١

١١

٢

١٢

٣

١٠

٤



أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

27

إذا كان $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$

فإن قياس الزاوية بين المتجهين \vec{a} ، \vec{b} =

الحل

بتربيع الطرفين

$$\therefore \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$$

$$\therefore \cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \cancel{\|\vec{a}\|^2} + \cancel{\|\vec{b}\|^2} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore 2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \text{صفر}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \text{صفر}$$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}$$

أ / رفعت حمزة

٣٠

١

٤٥

٢

٦٠

٣

٩٠

٤



مراجعة الهندسة الفراغية

28

إذا كان $\vec{M} = (3, -2, 4)$ ، $\vec{N} = (5, -1, 1)$
ولكن $\vec{M} \perp \vec{N}$ فإن $6 - 2 = 4 \dots$

٩ - ١

١٠ - ٢

٢٠ - ٣ ✓

٢٤ - ٤

$$\therefore \vec{M} \perp \vec{N} \therefore \vec{M} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = (3, -2, 4) \cdot (5, -1, 1) = 0$$

$$0 = 4 - 10 + 20$$

$$20 - 10 = 4$$

$$\therefore 6 - 2 = 4$$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

29

إذا كان $\vec{A} = (2\text{جناه}, \text{لوس}, \text{جاه})$ ، $\vec{B} = (2\text{جناه}, \text{لوس}, 27\text{جاه})$ وكان $\vec{A} \cdot \vec{B} = 11$

فإن س =

٥ (د)

٦٢٥ (ج)

١٢٥ (ب)

٢٥ (أ)

الحل

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2\text{حتاه} + \text{لوس} + 27\text{جاه} = 11$$

$$2(\text{حتاه} + \text{جاه}) + 3\text{لوس} = 11$$

$$2 + 3\text{لوس} = 11 \quad \therefore \text{لوس} = 3$$

$$\therefore \text{س} = 125$$

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

30

٦ / أوجد قيم θ التي عندها تكون الزاوية بين المتجهين $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ ، $\vec{b} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3$ منفرجة

$$\textcircled{2} \quad \theta \in]-\infty, \infty]$$

$$\textcircled{1} \quad \theta \in]-\infty, \infty]$$

$$\textcircled{4} \quad \theta \in]-\infty, \infty]$$

$$\textcircled{3} \quad \theta \in]-\infty, \infty]$$

∴ الزاوية بين المتجهين منفرجة ∴ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

$$\therefore -\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{a} < 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$$

$$\therefore \theta \in]-\infty, \infty]$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

31

إذا كان \vec{A} ، \vec{B} متجهين وكان $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

١٥ • ✓

مركبة المتجه \vec{B} في اتجاه المتجه \vec{A} هي ٣ فإن $\vec{A} \cdot \vec{B} = \dots\dots\dots$

٥ | ٣ •

٣ | ٥ •

٨ •

الحل

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|} = \text{مركبة المتجه } \vec{B} \text{ في اتجاه المتجه } \vec{A}$$

$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{0} = 3 \quad \therefore$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 15$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

32

الركبة الاتجاهية للمتجه $\vec{A} = (-1, 4, 2)$ في اتجاه
 $\vec{B} = (-2, 2, 1)$ تساوي

الحل :

$$\epsilon = \frac{(-1, 4, 2) \cdot (-2, 2, 1)}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \mu_B$$

متجه الوحدة في اتجاه المتجه \vec{B} هو $\vec{B} = (-1, 4, 2)$

∴ الركبة الاتجاهية هي $\mu_B = (-1, 4, 2) \cdot (-1, 4, 2) = (-1, 4, 2)$

① $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

② $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

③ $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

④ $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

أ / رفعت حمزة

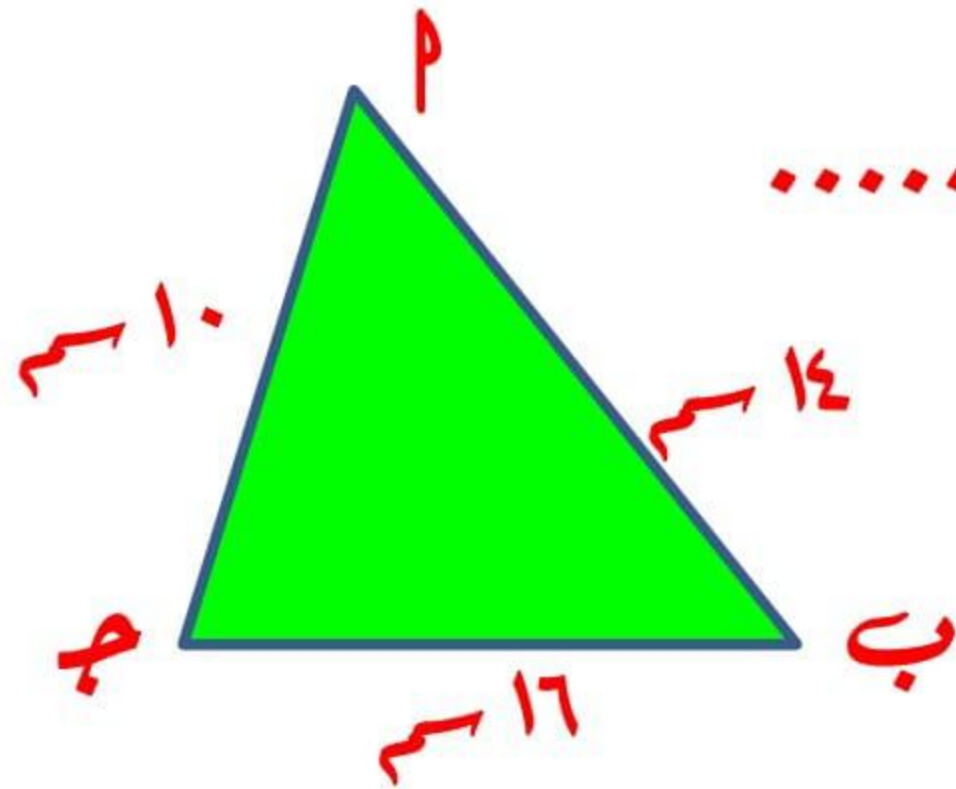
مراجعة الهندسة الفراغية

33

في الشكل المقابل : مسقط \vec{P} في اتجاه \vec{B} م =

(١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤)

الحل :



$$\begin{aligned} \frac{P^2 + M^2 - B^2}{2 \cdot P \cdot M} &= \cos B \\ \frac{100 + 256 - 196}{2 \cdot 14 \cdot 16} &= \cos B \\ \frac{11}{14} &= \cos B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B \cdot P \cdot \cos B}{AB} &= \text{المسقط} \\ \frac{AB \cdot P \cdot \cos B}{AB} &= \\ \frac{11}{14} \times 16 \times 14 &= \\ 11 &= \text{المسقط} \end{aligned}$$

مراجعة الهندسة الفراغية

34

$$(\vec{s} \times \vec{v}) \cdot \vec{e} + \vec{s} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$$

حيث \vec{s} ، \vec{v} ، \vec{e} هي متجهات الوحدة الأساسية.

الحل

$$\therefore \vec{s} \times \vec{v} = \vec{e}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{v} = \text{صفر}$$

$$\therefore (\vec{s} \times \vec{v}) \cdot \vec{e} + \vec{s} \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{e} \cdot \vec{e} + \text{صفر} = \|\vec{e}\|^2 = 1$$

أ / رفعت حمزة



1 ☒

1- ☐

صفر ☐

2 ☐



مراجعة الهندسة الفراغية

35

إذا كان \vec{A} ، \vec{B} متجهي وحدة

$$\text{فإن } \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \cdot \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = \dots\dots$$

$$(0, 1, 2, 4)$$

الحل :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \theta \vec{C}$$

$$\therefore \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (1)$$

$$\therefore \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

$$\therefore \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad (2)$$

$$\text{بجمع (1)، (2) } \therefore \|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = 1 - 0 = 1$$

مراجعة الهندسة الفراغية

36

إذا كان $\vec{p} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (3, -1, -4)$ فإن
متجه الوحدة العمودي على المتجهين \vec{p} ، \vec{b} = ...

$$(-4, -4, -4) ، \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) ، (-1, 0, 0) ، \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

الحل :

$$\vec{p} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{e} + 3\vec{v} - \vec{s}$$

أ / رفعت حمزة

$$\|\vec{p} \times \vec{b}\| = \sqrt{16 + 16 + 16} = 4\sqrt{3}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{p} \times \vec{b}}{\|\vec{p} \times \vec{b}\|} = \frac{(-4, -4, -4)}{4\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



مراجعة الهندسة الفراغية

37

إذا كان $\vec{A} = (1, 2, 1)$ ، $\vec{B} = (2, -5, -1)$

فإن مساحة المثلث المنشأ على المتجهين \vec{A} ، \vec{B} = ... وحدة مربعة

(3، 11، $\frac{3}{2}$ ، 11، 99، 198)

الحل :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e} \cdot 9 - \vec{v} \cdot 3 + \vec{s} \cdot 3$$

أ / رفعت حمزة

$$||\vec{A} \times \vec{B}|| = \sqrt{9 + 9 + 9} = 11$$

∴ مساحة المثلث = $\frac{3}{2}$ وحدة مربعة

ملحوظة هامة ∴ مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على نفس المتجهين = 3، 11

مراجعة الهندسة الفراغية

38

إذا كانت $P(1, 2, 3)$ ، $B(3, 5, -2)$ ، $M(-1, 2, 0)$

فإن مساحة المثلث $AMB = \dots\dots\dots$ وحدة مربعة

الحل :

$$AMB = \overline{AB} = \overline{BP} = \overline{AP} = (1, 2, 3) = (5, -2, 0)$$

$$\overline{BM} = \overline{MP} = \overline{MB} = (-1, 2, 0) = (4, -3, 4)$$

$$\overline{AB} \times \overline{BM} = \begin{vmatrix} \overline{e} & \overline{v} & \overline{s} \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -7\overline{s} + 16\overline{v} + 5\overline{e}$$

$$\|\overline{AB} \times \overline{BM}\| = \sqrt{49 + 256 + 25} = \sqrt{330}$$

\therefore مساحة المثلث $AMB = \frac{1}{2} \sqrt{330}$ وحدة مربعة

أ / رفعت حمزة



مراجعة الهندسة الفراغية

39

أثبت أن النقاط $P(3, 5, 2)$ ، $B(7, 4, -1)$ ، $M(-3, 6, 7)$
تقع على استقامة واحدة

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (5, -1, -4)$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{B} = (-10, 2, 8)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 5 & -1 & -4 \\ -10 & 2 & 8 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

∴ مساحة المثلث = صفر

∴ النقاط P ، B ، M تقع على استقامة واحدة

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

40

إذا كان $\vec{A} = (4, 0, 3)$ ، $\vec{B} = (2, 3, -2)$ ، $\vec{C} = (-6, 1, 9)$
 فإن حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} تمثل
 ثلاث أضلاع متلاقية بساوي وحدة مكعبة

(٣٦ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ٥٦)

الحل :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (2 + 27) - (2 + 18) = 56$$

∴ حجم متوازي السطوح = ٥٦ وحدة مكعبة

ملحوظة هامة إذا كان $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ = صفر

فإن المتجهات \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} تقع في مستوى واحد

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية



41

إذا كان: $\|\vec{A}\| = 4$ ، $\|\vec{B}\| = 3$ ، $\|\vec{C}\| = 24$ ، حيث \vec{A} ، \vec{B} ، \vec{C} ثلاث متجهات متعامدة متنى متنى

فإن: $\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\| = \dots\dots\dots$

- ☐ ١٠ ☐ ١١ ☐ ١٢ ☒ ١٣

الحل

نفرض أن $\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\| = \dots\dots\dots$ بالتربيع

$$\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 + 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos 90^\circ + 2\|\vec{A}\|\|\vec{C}\|\cos 90^\circ + 2\|\vec{B}\|\|\vec{C}\|\cos 90^\circ$$

$$\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\|^2 = 16 + 9 + 576 + 0 + 0 + 0 = 601$$

$$\|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\| = \sqrt{601} \approx 24.5$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

42

إذا كان: \vec{A} ، \vec{B} متجهين ^ك وحدة وكان المتجه \vec{A} عموديا على المستوى الذي يحوي المتجه \vec{B} ، \vec{C}
 بحيث قياس لزاوية بين المتجهين \vec{B} ، \vec{C} = 60° فإن: $||\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}|| = \dots\dots\dots$

الحل

بالتربيع

نفرض أن $K = ||\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}||$

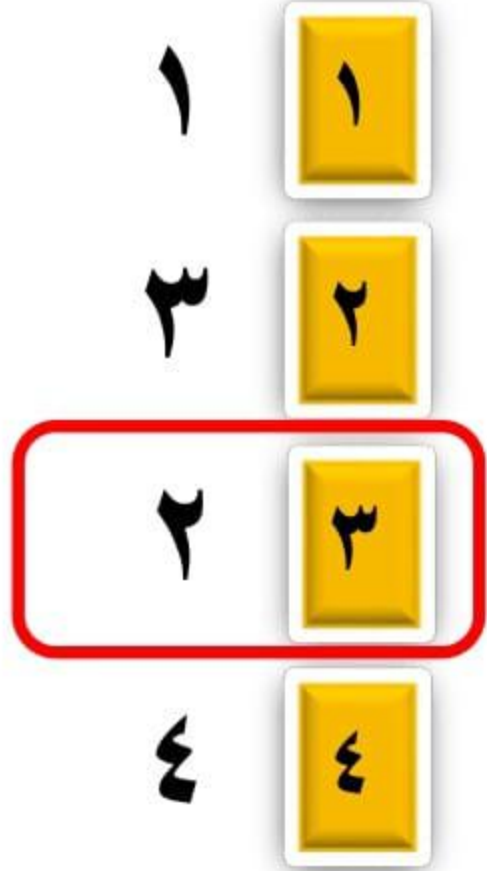
$$K^2 = ||\vec{A}||^2 + ||\vec{B}||^2 + ||\vec{C}||^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + 2\vec{A} \cdot \vec{C} + 2\vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$K^2 = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 \times 1 \times 1 \times \cos 60^\circ$$

$$K^2 = 4$$

$$\therefore K = 2$$

أ / رفعت حمزة





مراجعة الهندسة الفراغية

50 أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١- ، ٣) ويقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزء طوله ٦ وحدات.

الحل

المستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ١- ، ٣) - (٠ ، ٠ ، ٦)

متجه الاتجاه هـ = (٢ ، ١- ، ٣) - (٠ ، ٠ ، ٦) = (٢ ، ١- ، ٣)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} + \vec{v}$$

المتجه

$$\vec{r} = (٢ ، ١- ، ٣) + (٠ ، ٠ ، ٦)$$

المعادلات البارامترية

$$\begin{cases} ٢ - ٢ = ٠ \\ ١ - ١ = ٠ \\ ٣ + ٣ = ٦ \end{cases}$$

المتماثلة (الاحداثية)

$$\frac{٣ - ٢}{٣} = \frac{١ + ٣}{١} = \frac{٢ - ٢}{٤}$$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية



43 إذا كان: \vec{A} ، \vec{B} متجهي وحدة حيث $\|\vec{A} + \vec{B}\| = 1$ فإن $(\vec{A}^6 + \vec{B}^4) \odot (-\vec{A}^2 + \vec{B}) = \dots$

- ١- ☐ ٢- ☐ ٣- ☒ ٤- ☐ ٥- ☐ ٦- ☐ ٧- ☐ ٨- ☐ ٩- ☐ ١٠- ☐

الحل

$\therefore \|\vec{A} + \vec{B}\| = 1$ بالتربيع

$\therefore \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$ $\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{2}$

$(\vec{A}^6 + \vec{B}^4) \odot (-\vec{A}^2 + \vec{B}) = -\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$

$= -1 + 1 - 1 = -1$

أ / رفعت حمزة

مراجعة الهندسة الفراغية

44

إذا كان \vec{A} متجه غير صفري وكان: $\|\vec{A} \times \vec{S}\|^2 + \|\vec{A} \times \vec{V}\|^2 + \|\vec{A} \times \vec{E}\|^2 = 18$
فإن: $\|\vec{A}\| = \dots\dots\dots$

٩

⑤

٦

④

٣

✓

③

٢

①

الحل

$$\|\vec{A}\|^2 \cos^2 \theta_s + \|\vec{A}\|^2 \cos^2 \theta_v + \|\vec{A}\|^2 \cos^2 \theta_e = 18$$

$$\|\vec{A}\|^2 = [\cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_v + \cos^2 \theta_e] = 18$$

$$\|\vec{A}\|^2 = [3 - (\cos^2 \theta_s + \cos^2 \theta_v + \cos^2 \theta_e)] = 18$$

$$18 = \|\vec{A}\|^2$$

$$3 = \|\vec{A}\|$$

أ / رفعت حمزة